

Komplexní analýza

Fourierovy řady

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
martin.bohata@fel.cvut.cz

Fourierovy řady – opakování

- Ať $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval. Značení:

$$L^1(I) = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_I |f(t)| \, dt < +\infty \right\},$$
$$L^2(I) = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_I |f(t)|^2 \, dt < +\infty \right\}.$$

- V $L^1(I)$ a $L^2(I)$ ztotožňujeme funkce lišící se jen na množině míry 0.
- Ať $a \in \mathbb{R}$, $T > 0$. Fourierova řada funkce $f \in L^1([a, a+T))$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$$

kde

$$a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}_0;$$
$$b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Fourierovy řady – opakování

- Konverguje-li Fourierova řada funkce f v bodě $t \in \mathbb{R}$, označíme její součet symbolem $\mathcal{F}_f(t)$.
- Dále budeme výše uvedenou řadu nazývat reálným tvarem Fourierovy řady (případně reálnou Fourierovou řadou) funkce f .
- Platí $L^2([a, a + T)) \subseteq L^1([a, a + T))$.
- V $L^2([a, a + T))$ leží například všechny po částech spojitě funkce na intervalu $[a, a + T)$.
- Na $L^2([a, a + T))$ je dán skalární součin

$$\langle f, g \rangle = \int_a^{a+T} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

- Jestliže se omezíme na funkce z $L^2([a, a + T))$, pak (reálnou) Fourierovu řadu můžeme interpretovat jako rozvoj funkce do ortogonálního systému tvořeného funkcemi $1, \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right), \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$, kde $n \in \mathbb{N}$.

Komplexní tvar Fourierovy řady

- **Komplexní tvar Fourierovy řady** (případně **komplexní Fourierova řada**) funkce $f \in L^1([a, a + T])$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}},$$

kde

$$c_n = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) e^{-\frac{2\pi i n t}{T}} dt.$$

- $\mathcal{F}_f(t) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=-k}^k c_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}}.$
- $c_n \dots$ (**komplexní**) **Fourierovy koeficienty** funkce f .
- Pokud neřekneme jinak, budeme pod Fourierovou řadou vždy rozumět její komplexní tvar.
- Omezíme-li se na funkce z $L^2([a, a + T])$, pak (komplexní) Fourierova řada je rozvoj funkce do ortogonálního systému tvořeného funkcemi $e^{\frac{2\pi i n t}{T}}$, kde $n \in \mathbb{Z}$.

Souvislost koeficientů a_n, b_n a c_n

- Platí

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{ia_n + b_n}{2i} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N},$$
$$c_{-n} = \frac{ia_n - b_n}{2i} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Tedy

$$a_n = c_n + c_{-n} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}_0;$$
$$b_n = i(c_n - c_{-n}) \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

- Nabývá-li f pouze reálných hodnot, pak

$$c_{-n} = \overline{c_n}.$$

V tomto případě je

$$a_n = 2\operatorname{Re} c_n \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}_0;$$
$$b_n = -2\operatorname{Im} c_n \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Jednoduchý příklad

Příklad

Uvažme funkci

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \in [-1, 0), \\ t & \text{pro } t \in [0, 1). \end{cases}$$

Zřejmě $f \in L^2([-1, 1))$. Komplexní Fourierova řada funkce f je

$$\frac{1}{4} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left[\frac{(-1)^n - 1}{2\pi^2 n^2} + \frac{(-1)^n i}{2\pi n} \right] e^{i\pi n t}.$$

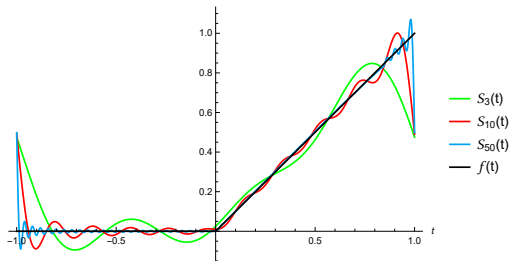
Reálná Fourierova řada funkce f je

$$\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2} \cos(\pi n t) + \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin(\pi n t).$$

Jednoduchý příklad – částečné součty

Příklad (Pokračování)

Označme $S_n = \sum_{k=-n}^n c_k e^{\frac{2\pi i k t}{T}}$.



Věta (Dirichletova věta)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $T > 0$ a $f : [a, a + T) \rightarrow \mathbb{C}$. Předpokládejme, že f a f' jsou po částech spojitě funkce na $[a, a + T)$. Pak (komplexní i reálná) Fourierova řada funkce f konverguje v každém bodě intervalu $[a, a + T)$ a její součet je

- ① $\mathcal{F}_f(t) = \frac{1}{2} [f(t+) + f(t-)]$ pro každé $t \in (a, a + T)$;
- ② $\mathcal{F}_f(a) = \mathcal{F}_f(a + T) = \frac{1}{2} [f(a+) + f((a + T)-)]$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

- Je-li navíc f je spojitá na $[a, a + T)$ a $f(a) = \lim_{t \rightarrow (a+T)-} f(t)$, pak $f(t) = \mathcal{F}_f(t)$ pro každé $t \in [a, a + T)$ a $\mathcal{F}_f$ je periodickým rozšířením funkce f .

Příklady

Příklad

Již víme, že komplexní Fourierova řada funkce

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \in [-1, 0) \\ t & \text{pro } t \in [0, 1). \end{cases}$$

je

$$\frac{1}{4} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left[\frac{(-1)^n - 1}{2\pi^2 n^2} + \frac{(-1)^n i}{2\pi n} \right] e^{i\pi n t}.$$

Podle Dirichletovy věty konverguje tato řada pro každé $t \in [-1, 1)$ (a tedy pro každé $t \in \mathbb{R}$) a platí, že

$$\mathcal{F}_f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro každé } t \in (-1, 0), \\ t & \text{pro každé } t \in [0, 1), \\ \frac{1}{2} & \text{pro } t = -1. \end{cases}$$

Parsevalova rovnost

Věta (Parsevalova rovnost)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $T > 0$ a $f \in L^2([a, a + T))$. Jestliže $c_n \in \mathbb{C}$ jsou komplexní Fourierovy koeficienty funkce f , pak

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} |f(t)|^2 dt$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

- Pro reálné Fourierovy koeficienty a_n a b_n funkce $f \in L^2([a, a + T))$ má Parsevalova rovnost tvar

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} |f(t)|^2 dt$$

Souvislost mezi Fourierovou a Laurentovou řadou

Ať $a \in \mathbb{R}$, $T > 0$ a funkce $g(z)$ je holomorfní na nějakém mezikruží $P(0; r; R)$, kde $r < 1 < R$.

- Na $P(0; r; R)$ je $g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$.
- $\varphi(t) = e^{\frac{2\pi i t}{T}}$, $t \in [a, a + T]$, je parametrizace jednotkové kružnice C se středem v počátku.
- Pro koeficienty c_n platí

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} g\left(e^{\frac{2\pi i t}{T}}\right) e^{-\frac{2\pi i n t}{T}} dt.$$

- Funkce $f : [a, a + T) \rightarrow \mathbb{C}$ splňující $f(t) = g\left(e^{\frac{2\pi i t}{T}}\right)$ pro každé $t \in [a, a + T)$ má tak (komplexní) Fourierovu řadu

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}}$$

a tato řada konverguje k f v každém bodě intervalu $[a, a + T)$.

Souvislost mezi Fourierovou a Laurentovou řadou

Příklad

Je dána funkce

$$f(t) = \frac{\frac{1}{2}}{e^{i\pi t} - \frac{1}{2}} + \frac{2}{2 - e^{i\pi t}}, \quad t \in [0, 2).$$

Protože

$$\frac{\frac{1}{2}}{z - \frac{1}{2}} + \frac{2}{2 - z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2^{|n|}} \quad \text{pro } \frac{1}{2} < |z| < 2,$$

je

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi n t}}{2^{|n|}}$$

pro každé $t \in [0, 2)$.