

Komplexní analýza

Fourierova transformace

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
martin.bohata@fel.cvut.cz

Fourierova transformace na $L^1(\mathbb{R})$

- Rozklad do funkcí $e^{i\omega t}$ i pro neperiodickou funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.
- Aplikace: Zpracování signálu, fyzika, matematika,...

Definice (Fourierova transformace na $L^1(\mathbb{R})$)

- 1 **Fourierova transformace** funkce $f \in L^1(\mathbb{R})$ je funkce $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definovaná předpisem

$$\hat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

- 2 **Inverzní Fourierova transformace** funkce $f \in L^1(\mathbb{R})$ je funkce $\check{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definovaná předpisem

$$\check{f}(\omega) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt.$$

- Jiné značení: $\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega)$ a $\check{f}(\omega) = \mathcal{F}^{-1}[f(t)](\omega)$.

Fourierova transformace na $L^1(\mathbb{R})$

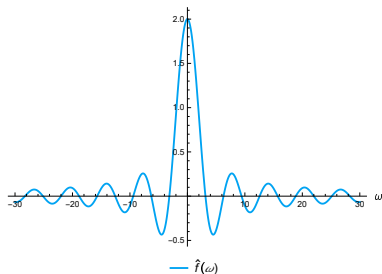
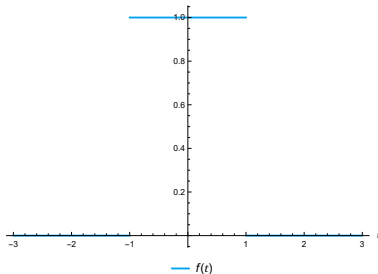
Příklad

Ať

$$f(t) = \chi_{[-1,1]}(t).$$

Potom

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} 2 \frac{\sin \omega}{\omega}, & \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 2, & \omega = 0. \end{cases}.$$



Fourierova transformace na $L^1(\mathbb{R})$

Příklad

$$\mathcal{F} \left[\frac{1}{1+t^2} \right] (\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$

Tvrzení (základní vlastnosti)

Nechť $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ a $a \in \mathbb{C}$.

- ❶ $\mathcal{F} [f(t) + ag(t)] (\omega) = \mathcal{F} [f(t)] (\omega) + a\mathcal{F} [g(t)] (\omega).$
- ❷ $\mathcal{F} [f(t)] (\omega) = 2\pi \mathcal{F}^{-1} [f(t)] (-\omega).$
- ❸ Je-li $a \in \mathbb{R}$, pak $\mathcal{F} [f(t-a)] (\omega) = e^{-i\omega a} \mathcal{F} [f(t)] (\omega).$
- ❹ Je-li $a \in \mathbb{R}$, pak $\mathcal{F} [e^{iat} f(t)] (\omega) = \mathcal{F} [f(t)] (\omega - a).$
- ❺ Je-li $a \in \mathbb{R}$ nenulové, pak $\mathcal{F} [f(at)] (\omega) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F} [f(t)] \left(\frac{\omega}{a} \right).$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Fourierova transformace na $L^1(\mathbb{R})$

Příklad

$$\mathcal{F} \left[\frac{e^{it}}{1 + (2t - 3)^2} \right] (\omega) = \frac{\pi}{2} e^{-\frac{3i(\omega-1)}{2}} e^{-\frac{|\omega-1|}{2}}$$

Věta (Riemannovo-Lebesgueovo lemma)

Jestliže $f \in L^1(\mathbb{R})$, pak $\hat{f}$ je spojitá funkce taková, že

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0.$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

Fourierova transformace na $L^1(\mathbb{R})$

Věta (obraz derivace)

Jestliže $n \in \mathbb{N}$ a $f, f', \dots, f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$ jsou spojité, pak

$$\mathcal{F} \left[f^{(n)}(t) \right] (\omega) = (i\omega)^n \mathcal{F} [f(t)] (\omega) .$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Věta (derivace obrazu)

Jestliže $f(t)$ a $tf(t)$ leží v $L^1(\mathbb{R})$, pak

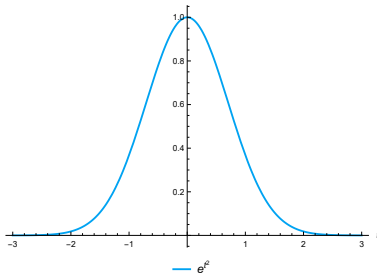
$$\mathcal{F} [tf(t)] (\omega) = i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F} [f(t)] (\omega) .$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Fourierova transformace na $L^1(\mathbb{R})$

Příklad (obraz Gaussovy funkce)

$$\mathcal{F} \left[e^{-t^2} \right] (\omega) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}}.$$



Pro $a > 0$ je

$$\mathcal{F} \left[e^{-at^2} \right] (\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}.$$

Definice (konvoluce)

Konvoluce funkcí $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ je funkce $h = f * g$ definovaná předpisem

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) \, d\tau.$$

Lze ukázat, že pro $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$ je

- $f * g \in L^1(\mathbb{R})$;
- $f * g = g * f$;
- $(f * g) * h = f * (g * h)$

Příklad

Jestliže

$$f(t) = \chi_{[-1,1]}(t),$$

pak

$$(f * f)(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, -2] \cup (2, \infty), \\ t + 2, & t \in (-2, 0], \\ 2 - t, & t \in (0, 2]. \end{cases}$$

Věta (o obrazu konvoluce)

Jestliže $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, potom

$$\mathcal{F}[(f * g)(t)](\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega) \mathcal{F}[g(t)](\omega).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

- Neexistuje $\delta \in L^1(\mathbb{R})$ tak, že $\delta * f = f$ pro každé $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Příklad

Ať

$$f(t) = \chi_{[-1,1]}(t).$$

Potom Fourierova transformace $f * f$ je

$$\mathcal{F}[(f * f)(t)](\omega) = \begin{cases} 4 \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2}, & \omega \neq 0, \\ 4, & \omega = 0. \end{cases}$$

Pohádka o Diracovi II

Ať $a \in \mathbb{R}$ a $\delta_a(t)$ je Diracova funkce.

- Připomeňme, že pro každou vhodnou funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ jsme položili

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) \delta_a(t) dt := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi_n(t) dt,$$

kde $\varphi_n(t) = n \chi_{[a, a + \frac{1}{n}]}(t)$.

- Pro každé $f \in L^1(\mathbb{R})$ je
 - $(\delta_a * f)(t) = f(t - a)$
 - $\mathcal{F}[\delta_a](\omega) = e^{-ia\omega}$.
 - Speciálně $\delta * f = f$ a $\hat{\delta}(\omega) = 1$.
- Rozšířením Fourierovy transformace na objekty typu Diracovy funkce máme například
 - $\mathcal{F}[e^{iat}](\omega) = 2\pi\delta_a(\omega)$,
 - $\mathcal{F}[\sin t](\omega) = \frac{\pi}{i}(\delta_1 - \delta_{-1}), \dots$

Věta o inverzi

Věta (o inverzní Fourierově transformaci)

Nechť $f \in L^1(\mathbb{R})$.

❶ *Je-li f spojitá a $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, pak pro každé $t \in \mathbb{R}$ je*

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1} \left[\hat{f}(\omega) \right] (t).$$

❷ *Jestliže f a f' jsou po částech spojitě (na $\mathbb{R}$), pak pro každé $t \in \mathbb{R}$ je*

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \mathcal{F}^{-1} \left[\hat{f}(\omega) \chi_{[-R,R]}(\omega) \right] (t).$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

Věta o inverzi

Důsledek

Jestliže dvě spojité funkce z $L^1(\mathbb{R})$ mají stejnou Fourierovu transformaci, potom se rovnají.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

Ať

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} 2\frac{\sin \omega}{\omega}, & \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 2, & \omega = 0. \end{cases}$$

Potom

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \mathcal{F}^{-1} \left[\hat{f}(\omega) \chi_{[-R,R]}(\omega) \right] (t) = \begin{cases} 1, & t \in (-1, 1), \\ \frac{1}{2}, & t \in \{-1, 1\}, \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]. \end{cases}$$

Příklad

Je dána diferenciální rovnice

$$y''(t) - y(t) = e^{-t^2}.$$

Využitím Fourierovy transformace dostaneme řešení:

$$y(t) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|} e^{-(t-\tau)^2} d\tau.$$

Souvislost s Fourierovou řadou

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ je periodická funkce s periodou $T > 0$ a $f|_{[a, a+T)} \in L^1([a, a+T))$. Položme

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [a, a+T), \\ 0, & t \notin [a, a+T). \end{cases}$$

Pak Fourierovy koeficienty c_n funkce $f|_{[a, a+T)}$ jsou

$$c_n = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) e^{-i \frac{2\pi}{T} n t} dt = \frac{1}{T} \mathcal{F}[f_T(t)] \left(\frac{2\pi n}{T} \right).$$

Příklad

Ať

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1, 1], \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]. \end{cases}$$

Již víme, že

$$\mathcal{F}[(f * f)(t)](\omega) = \begin{cases} 4 \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2}, & \omega \neq 0, \\ 4, & \omega = 0. \end{cases}$$

Fourierova řada zúžení funkce $f * f$ na interval $[-2, 2]$ proto je

$$1 + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{4 \sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi^2 n^2} e^{i \frac{\pi n}{2} t}.$$

Souvislost s Laplaceovou transformací

Ať $f \in L_0$ taková, že $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$ je definována pro $s \in \mathbb{C}$ splňující $\operatorname{Re} s = 0$. Potom $f \in L^1(\mathbb{R})$ (pro $t < 0$ chápeme f dodefinované 0) a

$$\hat{f}(\omega) = F(i\omega).$$

Příklad

Ať

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Potom

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{L}[f(t)](i\omega) = \frac{1}{i\omega + 1}.$$

Fourierova transformace na $L^2(\mathbb{R})$

- Je-li $f \in L^2(\mathbb{R})$, pak nutně neplatí, že $f \in L^1(\mathbb{R})$.
- Je-li $f \in L^2(\mathbb{R})$, pak její Fourierovou transformací rozumíme funkci

$$\hat{f}(\omega) := \lim_{R \rightarrow +\infty} \mathcal{F} \left[f(t) \chi_{[-R,R]}(t) \right] (\omega).$$

- Fourierova transformace je bijekce $L^2(\mathbb{R})$ na $L^2(\mathbb{R})$.
- Jsou-li $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, pak platí tzv. **Parsevalova rovnost**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} \, d\omega.$$

Odtud dostáváme tzv. **Plancherelovu rovnost**

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 \, d\omega.$$

Fourierova transformace na $L^2(\mathbb{R})$

Pro $f \in L^2(\mathbb{R})$ definujeme

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt}.$$

Věta (relace neurčitosti)

Jestliže $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ je funkce třídy C^1 a $f(t), f'(t), tf(t)$ leží v $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, potom

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \|f(t)\|_2^2 \leq \|tf(t)\|_2 \left\| \omega \hat{f}(\omega) \right\|_2$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

- Věta říká, že funkce f a $\hat{f}$ nemohou být současně lokalizovány v nějaké dostatečně malé oblasti reálné osy.
- Rovnost nastává právě tehdy, když $f(t) = Ke^{-ct^2}$ pro nějaké konstanty $K \in \mathbb{C}$ a $c > 0$.

Fourierova transformace na $L^2(\mathbb{R})$

Věta (Shannonova vzorkovací věta)

Ať $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ a existuje $\Omega > 0$ tak, že

$$\left\{ \omega \in \mathbb{R} \mid \hat{f}(\omega) \neq 0 \right\} \subseteq [-\Omega, \Omega].$$

Jestliže $T = \frac{\pi}{\Omega}$ a $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f(nT)| < +\infty$, potom

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) \operatorname{sinc}(\Omega(t - nT)),$$

kde

$$\operatorname{sinc}(\Omega(t - nT)) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Důkaz: Vynecháváme. ■