

Komplexní analýza

Diskrétní Fourierova transformace

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
martin.bohata@fel.cvut.cz

Značení a opakování

- $N \in \mathbb{N}$.
- Komponenty prvků z $\mathbb{C}^N$ budeme indexovat od 0. Tedy

$$\mathbf{y} = (y_k)_{k=0}^{N-1} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1}).$$

- Při maticových zápisech budeme psát komponenty vektoru $\mathbf{y}$ do sloupce.
- Na $\mathbb{C}^N$ máme dán skalární součin

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \overline{y_k},$$

a normu

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

- Definujeme

$$w_N := e^{\frac{2\pi i}{N}}.$$

Definice (diskrétní Fourierova transformace)

Diskrétní Fourierovou transformací (řádu N) nazveme zobrazení $\mathcal{F}_N : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ definované předpisem

$$\mathcal{F}_N[\mathbf{y}] = \left(\sum_{l=0}^{N-1} y_l w_N^{-lk} \right)_{k=0}^{N-1}$$

- Pro označení hodnoty $\mathcal{F}_N$ v bodě $\mathbf{y}$ používáme kromě $\mathcal{F}_N[\mathbf{y}]$ také symboly Y a $\hat{\mathbf{y}}$.
- k -tou komponentu vektoru $\mathcal{F}_N[\mathbf{y}]$ budeme značit $\mathcal{F}_N[\mathbf{y}](k)$, Y_k , $\hat{y}_k$.

Interpretace DFT z pohledu lineární algebry

Lemma

At' $n \in \mathbb{Z}$. Potom

$$\sum_{k=0}^{N-1} w_N^{nk} = \begin{cases} N, & \text{je-li } n = Nl \text{ pro nějaké } l \in \mathbb{Z}; \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

- Pro každé $k = 0, \dots, N-1$ označme

$$\epsilon_k = \frac{1}{N} \left(1, w_N^k, w_N^{2k}, \dots, w_N^{(N-1)k} \right).$$

Pak $(\epsilon_0, \dots, \epsilon_{N-1})$ je ortogonální báze prostoru $\mathbb{C}^N$.

- $\mathcal{F}_N[\mathbf{y}]$ je vektor souřadnic vektoru $\mathbf{y}$ vzhledem k ortogonální bázi $(\epsilon_0, \dots, \epsilon_{N-1})$.

Matice DFT a inverzní DFT

Věta (maticová reprezentace DFT)

Zobrazení $\mathcal{F}_N : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ je izomorfismus, jehož matice vzhledem ke kanonické bázi je

$$\Omega_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \overline{w_N} & \overline{w_N^2} & \cdots & \overline{w_N^{N-1}} \\ 1 & \overline{w_N^2} & \overline{w_N^4} & \cdots & \overline{w_N^{2(N-1)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \overline{w_N^{N-1}} & \overline{w_N^{(N-1)2}} & \cdots & \overline{w_N^{(N-1)^2}} \end{pmatrix}.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Definice (inverzní diskretní Fourierova transformace)

Inverzní zobrazení $\mathcal{F}_N^{-1} : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ k $\mathcal{F}_N$ nazýváme **inverzní diskretní Fourierova transformace** (řádu N).

Matrice DFT a inverzní DFT

Tvrzení (o inverzi)

- 1 $\mathcal{F}_N^{-1}[\mathbf{y}] = \frac{1}{N} \overline{\boldsymbol{\Omega}_N} \mathbf{y}$ (zde využíváme sloupcový zápis vektorů).
- 2 $\mathcal{F}_N^{-1}[\mathbf{y}](k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} y_l w_N^{kl}.$

Důkaz: Viz přednáška. ■

- Místo $\mathcal{F}_N^{-1}[\mathbf{y}]$ také píšeme $\hat{\mathbf{y}}$

Příklad

- 1 Je-li $\mathbf{y} = (1, i)$, pak $\hat{\mathbf{y}} = (1 + i, 1 - i)$.
- 2 Je-li $\mathbf{y} = (1, 0, 0, 1)$, pak $\hat{\mathbf{y}} = \frac{1}{4}(2, 1 - i, 0, 1 + i)$.
- 3 Je-li $\boldsymbol{\delta} = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^N$, pak $\hat{\boldsymbol{\delta}} = (1, 1, \dots, 1)$.

Úmluva

Dále nebudeme činit rozdíl mezi vektorem $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$ a periodickou funkcí $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ s periodou N takovou, že $f(k) = y_k$ pro každé $k = 0, \dots, N - 1$.

- Díky předchozí úmluvě má smysl psát y_k i pro $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \dots, N - 1\}$.

Příklad

Ať $\mathbf{y} = (1, i, -3 + i, 0)$. Pak podle naší úmluvy je například $y_{-6} = -3 + i$ a $y_7 = 0$.

konvoluce a DFT

Definice (konvoluce)

Konvoluce vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$ je vektor $\mathbf{z} = \mathbf{x} * \mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$ s komponentami

$$z_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k y_{n-k}.$$

- $\mathbf{x} * \mathbf{y} = \mathbf{y} * \mathbf{x}$;
- $\mathbf{x} * (\mathbf{y} * \mathbf{z}) = (\mathbf{x} * \mathbf{y}) * \mathbf{z}$.

Věta (obraz konvoluce)

*Je-li $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$, pak $\mathcal{F}_N[\mathbf{x} * \mathbf{y}](k) = \mathcal{F}_N[\mathbf{x}](k) \mathcal{F}_N[\mathbf{y}](k)$ pro každé $k = 0, \dots, N-1$.*

Důkaz: Viz přednáška. ■

Konvoluce a DFT

Příklad

Je-li $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$, pak $\mathcal{F}_N[\mathbf{x} * \boldsymbol{\delta}] = \mathcal{F}_N[\mathbf{x}]$.

Věta (Parsevalova rovnost)

Ať $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$. Potom

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{N} \langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} \rangle.$$

Speciálně $\|\mathbf{x}\|^2 = \frac{1}{N} \|\hat{\mathbf{x}}\|^2$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

Ať $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ má komponenty $x_n = \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$. Potom

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \frac{1}{N} \|\hat{\mathbf{x}}\|^2 = \frac{N}{2}.$$

Aplikace – přibližný výpočet Fourierových koeficientů

Předpokládejme, že:

- $T > 0$,
- $f \in C([0, T])$ splňuje $f(0) = f(T)$,
- $y_n = f\left(\frac{nT}{N}\right)$,
- $N \in \mathbb{N}$ je sudé.

Pro každé $n \in \mathbb{Z}$ splňující $-\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2} - 1$ chceme přibližně spočít

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-\frac{2\pi i n t}{T}} dt.$$

Aplikace – přibližný výpočet Fourierových koeficientů

Využijeme-li lichoběžníkovou metodu (s dělením $\left(\frac{T}{N}k\right)_{k=0}^{N-1}$ intervalu $[0, T]$) pro přibližný výpočet integrálu, dostaneme

$$c_n \approx \frac{1}{N} \hat{y}_n,$$

kde $-\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2} - 1$ (využíváme zde naší úmluvu, že $\hat{y}_{-1} = \hat{y}_{N-1}, \dots$).

Věta

Ať $f \in C([0, T])$ splňuje $f(0) = f(T)$, $N \in \mathbb{N}$ a Fourierova řada funkce f je absolutně konvergentní. Potom

$$\hat{y}_k = N \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{k+lN}$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Aplikace – přibližný výpočet součtu Fourierovy řady

Je dána Fourierova řada

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi i l t}{T}}.$$

- Její součet aproximujeme n -tým částečným součtem

$$s_n(t) = \sum_{l=-n}^n c_k e^{\frac{2\pi i l t}{T}}.$$

- Ať $N \in \mathbb{N}$ je takové, že $N \geq 2n + 1$. Chceme spočítat hodnoty trigonometrického polynomu s_n v bodech $\frac{T}{N}k$ pro každé $k \in \{0, \dots, N - 1\}$.

Platí

$$s_n\left(\frac{T}{N}k\right) = \hat{d}_k,$$

kde

$$d_k = \begin{cases} c_{-j}, & j = 0, \dots, n; \\ 0, & j = n + 1, \dots, N - n - 1; \\ c_{N-j}, & j = N - n, \dots, N - 1. \end{cases}$$

Aplikace – přibližný výpočet Fourierovy transformace

Ať $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, $N \in \mathbb{N}$. Pro dostatečně velké $n \in \mathbb{N}$ je

$$\hat{f}(\omega) \approx \int_{-n\pi}^{n\pi} f(t) e^{-i\omega t} dt,$$

Uvažme dělení $\left(\frac{\pi}{N}k\right)_{k=-nN}^{nN}$ intervalu $[-n\pi, n\pi]$. Pomocí lichoběžníkové metody dostaneme

$$\hat{f}(\omega) \approx \frac{\pi}{N} \left[\frac{f(-n\pi)e^{i\pi\omega n}}{2} + \frac{f(n\pi)e^{-i\pi\omega n}}{2} + \sum_{k=-nN+1}^{nN-1} f\left(\frac{\pi k}{N}\right) e^{-\frac{i\pi\omega}{N}k} \right].$$

Pro $l \in \mathbb{Z}$ máme

$$\hat{f}\left(\frac{l}{n}\right) \approx \frac{\pi}{N} \left[\frac{f(-n\pi) + f(n\pi)}{2} w_{2nN}^{-nNl} + \sum_{k=-nN+1}^{nN-1} f\left(\frac{\pi k}{N}\right) w_{2nN}^{-kl} \right].$$

Aplikace – přibližný výpočet Fourierovy transformace

Odtud

$$\hat{f}\left(\frac{l}{n}\right) \approx \frac{\pi}{N} \hat{y}_l,$$

kde $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{2nN}$ je vektor s komponentami

$$y_k = \begin{cases} f\left(\frac{\pi k}{N}\right), & k = 0, \dots, nN - 1, \\ \frac{f(-n\pi) + f(n\pi)}{2}, & k = nN, \\ f\left(\frac{\pi(k-2nN)}{N}\right), & k = nN + 1, \dots, 2nN - 1. \end{cases}$$

- $\hat{y}_l$ zde chápeme jako $2nN$ -periodickou funkci proměnné $l \in \mathbb{Z}$ (viz naše dřívější úmluva).
- V rozumnou aproximaci můžeme doufat jen pro $|l| \leq nN$, neboť $\hat{y}_l$ je $2nN$ -periodická funkce, ale $\hat{f}(\omega) \rightarrow 0$ pro $\omega \rightarrow \pm\infty$.

Rychlá Fourierova transformace

- Při přímém výpočtu diskrétní Fourierovy transformace potřebujeme spočítat
 - $(N - 1)^2$ (komplexních) násobení (výpočet hodnot w_N^k do počtu násobení nezapočítáváme);
 - $N(N - 1)$ (komplexních) sčítání.
- Rychlá Fourierova transformace je metoda pro efektivní počítání diskrétní Fourierovy transformace.
- Přesněji se pod rychlou Fourierovou transformací rozumí celá třída algoritmů k rychlému výpočtu diskrétní Fourierovy transformace. My si však načrtne ideu jen jedné z metod, a proto použijeme trochu nepřesně název rychlá Fourierova transformace k označení právě této metody.

Základní myšlenku si ukážeme v případě $N = 2^3$. Je-li $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$, pak

$$\begin{aligned}\hat{y}_n &= \sum_{k=0}^7 y_k w_8^{-nk} = \sum_{k=0}^3 y_{2k} w_4^{-nk} + w_8^{-n} \sum_{k=0}^3 y_{2k+1} w_4^{-nk} \\ &= \left[\sum_{k=0}^1 y_{4k} w_2^{-nk} + w_4^{-n} \sum_{k=0}^1 y_{2(2k+1)} w_2^{-nk} \right] \\ &\quad + w_8^{-n} \left[\sum_{k=0}^1 y_{4k+1} w_2^{-nk} + w_4^{-n} \sum_{k=0}^1 y_{2(2k+1)+1} w_2^{-nk} \right]\end{aligned}$$

Rychlá Fourierova transformace

Po úpravách dostaneme

$$\hat{y}_0 = [(y_0 + y_4) + (y_2 + y_6)] + [(y_1 + y_5) + (y_3 + y_7)],$$

$$\hat{y}_1 = [(y_0 - y_4) + w_4^{-1}(y_2 - y_6)] + w_8^{-1}[(y_1 - y_5) + w_4^{-1}(y_3 - y_7)],$$

$$\hat{y}_2 = [(y_0 + y_4) - (y_2 + y_6)] + w_8^{-2}[(y_1 + y_5) - (y_3 + y_7)],$$

$$\hat{y}_3 = [(y_0 - y_4) - w_4^{-1}(y_2 - y_6)] + w_8^{-3}[(y_1 - y_5) - w_4^{-1}(y_3 - y_7)],$$

$$\hat{y}_4 = [(y_0 + y_4) + (y_2 + y_6)] - [(y_1 + y_5) + (y_3 + y_7)],$$

$$\hat{y}_5 = [(y_0 - y_4) + w_4^{-1}(y_2 - y_6)] - w_8^{-1}[(y_1 - y_5) + w_4^{-1}(y_3 - y_7)],$$

$$\hat{y}_6 = [(y_0 + y_4) - (y_2 + y_6)] - w_8^{-2}[(y_1 + y_5) - (y_3 + y_7)],$$

$$\hat{y}_7 = [(y_0 - y_4) - w_4^{-1}(y_2 - y_6)] - w_8^{-3}[(y_1 - y_5) - w_4^{-1}(y_3 - y_7)],$$

Rychlá Fourierova transformace

- Pro $N = 2^3$ tedy musíme v rychlé Fourierově transformaci spočít
 - 5 násobení, zatímco přímý výpočet Diskrétní Fourierovy transformace z definice vyžaduje 49 násobení;
 - 24 sčítání, zatímco přímý výpočet Diskrétní Fourierovy transformace z definice vyžaduje 56 sčítání/odčítání.
- Uvedenou rychlou Fourierovu transformaci snadno zobecníme pro $N = 2^m$, kde $m \in \mathbb{N}$. Lze ukázat, že v tomto případě potřebujeme spočít
 - $\frac{1}{2}N[(\log_2 N) - 2] + 1$ násobení;
 - $N \log_2 N$ sčítání/odčítání.
- Pomocí rychlé Fourierovy transformace můžeme snadno počítat i inverzní diskretní Fourierovu transformaci, protože

$$\check{y}_k = \frac{1}{N} \hat{y}_{-k}.$$

Rychlá Fourierova transformace

Konvoluci $\mathbf{z} = \mathbf{x} * \mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$, kde $N = 2^m$, lze počítat následovně:

- 1 Pomocí rychlé Fourierovy transformace spočteme $\hat{\mathbf{x}}$ a $\hat{\mathbf{y}}$.
- 2 Vypočteme $\hat{z}_k = \hat{x}_k \hat{y}_k$ pro každé $k = 0, \dots, N - 1$.
- 3 Pomocí rychlé Fourierovy transformace spočteme $\mathbf{z} = \mathcal{F}_N^{-1}[\hat{\mathbf{z}}]$.

Jak efektivní je uvedený výpočet konvoluce oproti tomu z definice? Snadno nalezneme, že v uvedeném výpočtu potřebujeme provést

- $\frac{N}{2}[3(\log_2 N) - 4] + 3$ násobení (oproti N^2 násobením při výpočtu přímo z definice);
- $3N \log_2 N$ sčítání/odčítání (oproti $N(N - 1)$ sčítání při výpočtu přímo z definice).