

Komplexní analýza a transformace

Komplexní funkce

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
martin.bohata@fel.cvut.cz

Komplexní funkce

Definice (komplexní funkce)

Zobrazení $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se nazve **komplexní funkce** (komplexní proměnné).

Protože hodnoty komplexní funkce leží v $\mathbb{C}$, můžeme pro každé $z = x + iy \in \mathbb{C}$ psát

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

kde u, v jsou reálné funkce dvou reálných proměnných.

Terminologie a značení:

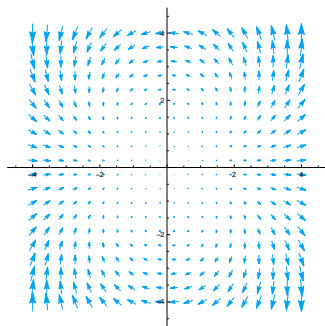
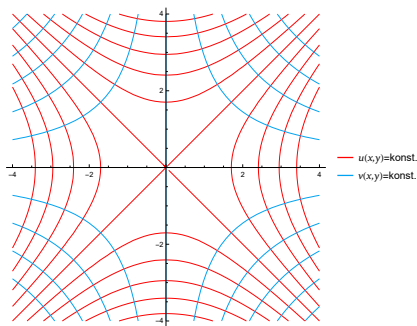
- $u \dots$ **reálná část** funkce f . Píšeme $u = \operatorname{Re} f$.
- $v \dots$ **imaginární část** funkce f . Píšeme $v = \operatorname{Im} f$.

Komplexní funkce

Příklad

Uvažme funkci $f(z) = z^2$.

- Reálná část funkce f je $u(x, y) = x^2 - y^2$;
- Imaginární část funkce f je $v(x, y) = 2xy$.



Limita

Definice (hromadný bod)

Bod $w \in \mathbb{C}_\infty$ je **hromadný bod množiny** $M \subseteq \mathbb{C}$, jestliže existuje posloupnost bodů $z_n \in M \setminus \{w\}$ tak, že $z_n \rightarrow w$ pro $n \rightarrow +\infty$.

Definice (limita funkce vzhledem k množině)

Ať $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a w je hromadný bod množiny $M \subseteq D$. Řekneme, že $L \in \mathbb{C}_\infty$ je **limita f v bodě w vzhledem k M** , jestliže pro každou posloupnost $(z_n)_{n=0}^{+\infty}$ bodů v $M \setminus \{w\}$ konvergující k w je

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(z_n) = L.$$

Píšeme $\lim_{\substack{z \rightarrow w \\ z \in M}} f(z) = L$.

- $\lim_{\substack{z \rightarrow w \\ z \in M}} f(z) = L$ právě tehdy, když ke každému okolí $U(L)$ existuje okolí $U(w)$ takové, že $f(M \cap (U(w) \setminus \{w\})) \subseteq U(L)$.

Limita

- Místo $\lim_{\substack{z \rightarrow w \\ z \in M}} f(z) = L$ píšeme $\lim_{z \rightarrow w} f(z) = L$ (resp. $\lim_{\substack{z \rightarrow w \\ V(z)}} f(z) = L$), je-li $M = D$ (resp. $M = \{z \in D \mid V(z)\}$, kde $V(z)$ je výroková forma).
- Pravidla pro zacházení s limitami jsou obdobná jako v reálném případě (limita součtu, součinu, ...).

Příklad

- 1 Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ a každé $w \in \mathbb{C}$ je $\lim_{z \rightarrow w} z^n = w^n$.
- 2 Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\lim_{z \rightarrow \infty} z^n = \infty$.
- 3 $\lim_{z \rightarrow i} z^2 - 2z + 3i = -1 + i$.
- 4 $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} = \infty$.
- 5 $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{|z|}$ neexistuje.

Tvrzení (výpočet limity po komponentách)

Ať $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ má reálnou část u a imaginární část v , $w = a + ib \in \mathbb{C}$ (kde $a, b \in \mathbb{R}$) je hromadný bod množiny $M \subseteq D$ a $L \in \mathbb{C}$. Potom

$\lim_{\substack{z \rightarrow w \\ z \in M}} f(z) = L$ právě tehdy, když

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ (x,y) \in M}} u(x,y) = \operatorname{Re} L \quad \text{a} \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ (x,y) \in M}} v(x,y) = \operatorname{Im} L.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Definice (spojitost komplexní funkce)

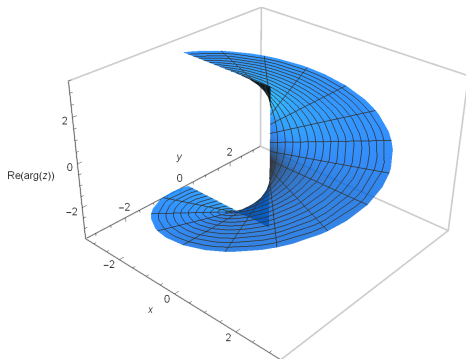
Nechť $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a $w \in D$. Řekneme, že f je

- ① **spojitá v bodě w** , jestliže pro každou posloupnost bodů $z_n \in D$ konvergující k w platí $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(z_n) = f(w)$.
 - ② **spojitá na množině $M \subseteq D$** , jestliže je spojitá v každém bodě $z \in M$.
- Jestliže bod $w \in D$ není hromadným bodem množiny D (tj. je izolovaným bodem množiny D), pak je f spojitá v bodě w .
 - Jestliže bod $w \in D$ je hromadným bodem množiny D , pak je f spojitá v bodě w právě tehdy, když $\lim_{z \rightarrow w} f(z) = f(w)$.
 - Podobně jako v reálném případě i zde platí tvrzení o spojitosti součtu, součinu, ...

Spojítost

Příklad

- 1 Konstantní funkce, z^n pro $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\bar{z}$ a $|z|$ jsou spojité funkce na $\mathbb{C}$.
- 2 $f(z) = \arg(z)$ je spojitá na $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = 0\}$.
Není spojitá v žádném bodě množiny $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z = 0\}$.



Definice (derivace komplexní funkce)

Nechť f je komplexní funkce definovaná na jistém okolí bodu $w \in \mathbb{C}$. Komplexní číslo $f'(w)$ se nazve **derivací funkce f v bodě w** , jestliže

$$f'(w) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(w+h) - f(w)}{h}.$$

Místo $f'(w)$ píšeme také $\frac{df}{dz}(w)$. Existuje-li $f'(w)$, pak říkáme, že f je **diferencovatelná v bodě w** .

Vyšší derivace definujeme jako v reálné analýze rekurzivně:

- $f^{(0)}(w) = f(w)$.
- $f^{(n)}(w) = (f^{(n-1)})'(w)$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Derivace

Tvrzení (derivace a aritmetické operace)

Jsou-li f a g diferencovatelné v bodě z , potom

- ❶ $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z);$
- ❷ $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z);$
- ❸ $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2},$ kdykoli je $g(z) \neq 0.$

Důkaz: Vynecháváme. (Důkaz je stejný jako v reálném případě.) ■

Tvrzení (derivace složené funkce)

Je-li g diferencovatelná v bodě z a f diferencovatelná v bodě $g(z)$, pak

$$(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z).$$

Důkaz: Vynecháváme. (Důkaz je stejný jako v reálném případě.) ■

Příklad

❶ Je-li $f(z) = K \in \mathbb{C}$, pak $f'(z) = 0$ pro každé $z \in \mathbb{C}$.

❷ Je-li $f(z) = z^n$, kde $n \in \mathbb{N}$, pak pro každé $z \in \mathbb{C}$ je

$$f'(z) = nz^{n-1}.$$

❸ Je-li $f(z) = \frac{1}{z^n} = z^{-n}$, kde $n \in \mathbb{N}$, pak pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je

$$f'(z) = -\frac{n}{z^{n+1}} = -nz^{-(n+1)}.$$

Tvrzení

Jestliže komplexní funkce je diferencovatelná v bodě z , pak je v z spojitá.

Důkaz: Vynecháváme. (Důkaz je stejný jako v reálném případě.) ■

Cauchyovy-Riemannovy podmínky

Věta (nutná podmínka diferencovatelnosti)

*Nechť komplexní funkce f je diferencovatelná v bodě $w = a + ib$. Pak $u = \operatorname{Re} f$ a $v = \operatorname{Im} f$ mají parciální derivace v bodě (a, b) a splňují v tomto bodě tzv. **Cauchyovy-Riemannovy podmínky**:*

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(a, b) &= \frac{\partial v}{\partial y}(a, b), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(a, b) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(a, b).\end{aligned}$$

Navíc platí, že

$$f'(w) = \frac{\partial u}{\partial x}(a, b) + i \frac{\partial v}{\partial x}(a, b).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Cauchyovy-Riemannovy podmínky

Příklad

Funkce $f(z) = \operatorname{Re} z$ je spojitá na $\mathbb{C}$, ale není diferencovatelná v žádném bodě $z \in \mathbb{C}$!

Věta (postačující podmínka diferencovatelnosti)

Nechť $w = a + ib$ a f je komplexní funkce s reálnou částí u a imaginární částí v . Jestliže u a v mají spojité parciální derivace v bodě (a, b) a splňují Cauchyovy-Riemannovy podmínky v tomto bodě, pak f je diferencovatelná v bodě w .

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

Funkce $f(z) = |z|^2$ je spojitá na $\mathbb{C}$, ale je diferencovatelná pouze v bodě $z = 0$.

Holomorfní funkce

Definice (holomorfní funkce)

- 1 Komplexní funkce f se nazve **holomorfní** na otevřené množině $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, jestliže je diferencovatelná v každém bodě $z \in \Omega$.
- 2 Funkce holomorfní na $\mathbb{C}$ se nazývá **celistvá**.

Příklad

- 1 Funkce $f(z) = z^n$, kde $n \in \mathbb{N}_0$, je celistvá funkce.
- 2 Funkce $f(z) = \frac{1}{z}$ holomorfní funkce na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Holomorfní funkce

Definice (úsečka)

Úsečka s krajními body $z, w \in \mathbb{C}$ je množina

$$\operatorname{seg}(z; w) = \{\lambda z + (1 - \lambda)w \mid \lambda \in [0, 1]\}.$$

Definice (oblast)

Otevřená množina $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ se nazve **oblast**, jestliže každé dva body $z \in \Omega$ lze spojit lomenou čarou ležící v Ω (tj. pro každé $z, w \in \Omega$ existují body $z_1, \dots, z_n \in \Omega$ tak, že $z_1 = z$, $z_n = w$ a $\bigcup_{k=1}^{n-1} \operatorname{seg}(z_k; z_{k+1})$).

Tvrzení (o nulovosti derivace)

Je-li $f' = 0$ na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, pak f je konstantní na Ω .

Důkaz: Viz přednáška. ■

Harmonické funkce

Definice (harmonická funkce)

Nechť $D \subseteq \mathbb{R}^2$ a $\Omega \subseteq D$ je oblast. Řekneme, že funkce $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ je **harmonická** na Ω , jestliže Φ má spojité druhé parciální derivace na Ω a $\Delta\Phi = 0$ na Ω .

Příklad

Je dána celistvá funkce $f(z) = z^2$. Její reálná část $u(x, y) = x^2 - y^2$ a imaginární část $v(x, y) = 2xy$ jsou harmonické na $\mathbb{R}^2$.

Tvrzení (souvislost holomorfních a harmonických funkcí)

Nechť f je holomorfní na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Potom reálná a imaginární část funkce f jsou harmonické funkce na Ω .

Důkaz: Viz přednáška. ■

Definice (harmonicky sdružená funkce)

Nechť u je harmonická funkce na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Funkci v nazveme **harmonicky sdruženou k u** , jestliže $u + iv$ je holomorfní funkce na Ω .

Příklad

Je dána funkce $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- 1 Funkce u je harmonická na $\mathbb{R}^2$.
- 2 Harmonicky sdružená funkce v k funkci u na $\mathbb{R}^2$ je tvaru $v(x, y) = 2xy + y + K$, kde K je libovolná reálná konstanta.