

Komplexní analýza a transformace

Křivkový integrál

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
martin.bohata@fel.cvut.cz

Komplexní funkce reálné proměnné

Ať $-\infty < a < b < +\infty$ a $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$.

- Ať $\operatorname{Re} \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a $\operatorname{Im} \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mají v bodě $t \in (a, b)$ (konečnou) derivaci. **Derivace funkce φ v bodě t** je komplexní číslo

$$\varphi'(t) := (\operatorname{Re} \varphi)'(t) + i(\operatorname{Im} \varphi)'(t).$$

- Jednostranné derivace funkce φ v bodech intervalu $[a, b]$ definujeme analogicky.
- Mluvíme-li o funkci $\varphi' : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, pak pod jejími hodnotami v bodech a, b rozumíme odpovídající jednostranné derivace funkce φ .
- Ať $\operatorname{Re} \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a $\operatorname{Im} \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jsou integrovatelné. **Integrál funkce φ přes interval $[a, b]$** je komplexní číslo

$$\int_a^b \varphi(t) dt := \int_a^b (\operatorname{Re} \varphi)(t) dt + i \int_a^b (\operatorname{Im} \varphi)(t) dt.$$

Komplexní funkce reálné proměnné

Tvrzení

Ať $-\infty < a < b < +\infty$. Jestliže $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ má derivaci (podle reálné proměnné) v bodě $t \in (a, b)$ a $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ má derivaci (podle komplexní proměnné) v bodě $\varphi(t) \in D$, pak $f \circ \varphi$ má derivaci (podle reálné proměnné) v bodě t a platí

$$(f \circ \varphi)'(t) = f'(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

- Analogické tvrzení platí i pro jednostranné derivace.

Příklad

$$(e^{it})' = ie^{it}.$$

Tvrzení

At' $-\infty < a < b < +\infty$. Jestliže $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ je spojitá a existují body $p_0, \dots, p_n \in [a, b]$ tak, že $a = p_0 < p_1 < \dots < p_n = b$ a pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$ je funkce $\varphi' \upharpoonright_{[p_{k-1}, p_k]}$ spojitá, pak

$$\int_a^b \varphi'(t) dt = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

$$\int_0^\pi e^{it} dt = 2i.$$

Definice (oblouk)

Ať $-\infty < a < b < +\infty$. Množina $C \subseteq \mathbb{C}$ se nazve **oblouk**, jestliže existuje funkce $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ tak, že

- 1 $C = \varphi([a, b])$;
- 2 jestliže $\varphi(s) = \varphi(t)$ a $s < t$, pak $s = a$ a $t = b$;
- 3 $\varphi' : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ je spojitá a $\varphi'(t) \neq 0$ pro každé $t \in (a, b)$.

Zobrazení φ se nazývá **parametrizace** oblouku C .

Křivky

Definice (křivka)

Ať $-\infty < a < b < +\infty$. Množina $C \subseteq \mathbb{C}$ se nazve **křivka**, jestliže existují body $p_0, \dots, p_n \in [a, b]$ a spojitá funkce $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ tak, že

- 1 $C = \varphi([a, b])$;
- 2 $a = p_0 < p_1 < \dots < p_n = b$;
- 3 pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$ je $C_k = \varphi([p_{k-1}, p_k])$ oblouk daný parametrizací $\varphi|_{[p_{k-1}, p_k]}$;
- 4 je-li $k \neq l$, pak $C_k \cap C_l$ je nejvýše dvouprvkovou podmnožinou množiny $\{\varphi(p_{k-1}), \varphi(p_k), \varphi(p_{l-1}), \varphi(p_l)\}$.

Zobrazení φ se nazývá **parametrizace** křivky C .

- Křivky uvažujeme orientované, tj. je zadán způsob jejich procházení.
- Každá orientace křivky C je indukovaná některou její parametrizací.
- Řekneme, že C je **křivka s parametrizací** φ , jestliže parametrizace φ indukuje orientaci C .

Ať C je křivka s parametrizací $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$.

- $\varphi(a)$ se nazývá **počáteční bod křivky C** . Píšeme p.b. $C = \varphi(a)$.
- $\varphi(b)$ se nazývá **koncový bod křivky C** . Píšeme k.b. $C = \varphi(b)$.
- Křivka C se nazve **uzavřená**, jestliže $\varphi(a) = \varphi(b)$.
- Křivka s parametrizací $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, kde $\psi(t) = \varphi(a + b - t)$, se nazývá **opačně orientovaná křivka ke křivce C** a značí se $-C$.
- Jestliže C_1 a C_2 jsou křivky takové, že k.b. $C_1 =$ p.b. C_2 , pak spojením C_1 a C_2 v tomto bodě, vznikne nová křivka, kterou značíme $C_1 + C_2$. Analogicky definujeme (a značíme) spojení křivek $C_1, \dots, C_n$.
- $C_1 - C_2 \dots$ spojení křivek C_1 a $-C_2$ (tj. $C_1 + (-C_2)$). Analogické značení používáme i v případě více než dvou křivek.
- $L(C) = \int_a^b |\varphi'(t)| dt \dots$ **délka křivky**.

Definice (Jordanova křivka)

Křivka C s parametrizací $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ se nazve **Jordanova**, jestliže

- ① C je uzavřená;
- ② je-li $\varphi(s) = \varphi(t)$ a $s < t$, pak $s = a$ a $t = b$.

- Jordanova křivka má právě dvě různé orientace.
- Řekneme, že Jordanova křivka je **kladně orientovaná**, procházíme-li ji proti směru hodinových ručiček.
- Řekneme, že Jordanova křivka je **záporně orientovaná**, procházíme-li ji po směru hodinových ručiček.

Příklad

Úsečka $\text{seg}(z_1; z_2)$ s počátečním bodem $z_1 \in \mathbb{C}$ a koncovým bodem $z_2 \in \mathbb{C}$ je křivka s parametrizací

$$\varphi(t) = z_1 + t(z_2 - z_1), \quad t \in [0, 1].$$

Její délka je $\int_0^1 |\varphi'(t)| \, dt = |z_2 - z_1|$.

Příklad

Ať C je kružnice se středem $S \in \mathbb{C}$ a poloměrem $R > 0$.

- ❶ C je kladně orientovaná: $\varphi(t) = S + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.
- ❷ C je záporně orientovaná: $\varphi(t) = S + Re^{-it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Délka kružnice je $\int_0^{2\pi} |\varphi'(t)| \, dt = 2\pi R$.

Křivkový integrál v komplexní rovině

Definice (křivkový integrál)

Nechť C je křivka s parametrizací $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ a f je komplexní funkce spojitá na C . Pak **křivkový integrál funkce f podél křivky C** definujeme předpisem

$$\int_C f(z) dz := \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

- Parametrizace indukující stejnou orientaci vedou na stejnou hodnotu křivkového integrálu.

Příklad

Ať $n \in \mathbb{Z}$ a C je kladně orientovaná kružnice se středem z_0 a poloměrem $R > 0$. Potom

$$\int_C (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{je-li } n = -1; \\ 0 & \text{je-li } n \neq -1. \end{cases}$$

Křivkový integrál v komplexní rovině

Tvrzení (vlastnosti křivkového integrálu)

Nechť C a K jsou křivky, p.b. $K = \text{k.b. } C$, $\alpha \in \mathbb{C}$ a komplexní funkce f, g jsou spojité na C . Potom

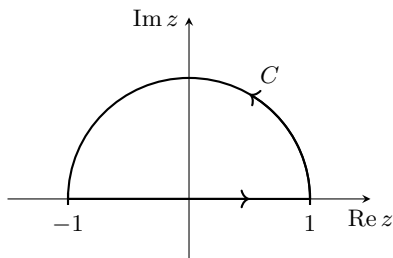
- ❶ $\int_C \alpha f(z) + g(z) dz = \alpha \int_C f(z) dz + \int_C g(z) dz;$
- ❷ $\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz;$
- ❸ $\int_{C+K} f(z) dz = \int_C f(z) dz + \int_K f(z) dz$, *kdykoli je navíc f spojitá na $C + K$;*
- ❹ $|\int_C f(z) dz| \leq L(C) \max_{z \in C} |f(z)|.$

Důkaz: Viz přednáška (jen ❹, důkaz zbylých bodů – domácí cvičení). ■

Křivkový integrál v komplexní rovině

Příklad

Ať C je křivka zadaná následujícím obrázkem:



Pak

$$\int_C \bar{z} dz = i\pi.$$

Primitivní funkce

Definice (primitivní funkce)

Ať $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je otevřená. Říkáme, že komplexní funkce $F(z)$ je **primitivní k $f(z)$ na Ω** , jestliže $F'(z) = f(z)$ na Ω .

Věta (Newtonova-Leibnitzova formule)

Je-li F primitivní k f na oblasti Ω a C je křivka v Ω s počátečním bodem z_1 a koncovým bodem z_2 , potom

$$\int_C f(z) \, dz = F(z_2) - F(z_1).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

- ① Je-li C úsečka s p.b. $C = 1$ a k.b. $C = 1 + i$, pak

$$\int_C \frac{1}{z} dz = \ln \sqrt{2} + i \frac{\pi}{4}.$$

- ② Funkce $\frac{1}{z}$ nemá na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ primitivní funkci, neboť pro kladně orientovanou kružnici C se středem v 0 a poloměrem 1 máme

$$\int_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0.$$

Tedy spojitost komplexní funkce nezaručuje existenci primitivní funkce (rozdíl od reálného oboru).

Primitivní funkce

Definice (nezávislost na cestě)

Ať komplexní funkce f je spojitá na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Řekneme, že **křivkový integrál funkce f nezávisí na cestě v Ω** , jestliže

$$\int_{C_1} f \, dz = \int_{C_2} f \, dz$$

pro všechny křivky $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{C}$ takové, že p.b. $C_1 = \text{p.b. } C_2$ a k.b. $C_1 = \text{k.b. } C_2$.

Věta (o existenci primitivní funkce)

At' komplexní funkce f je spojitá na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Potom jsou následující výroky ekvivalentní:

- ❶ *existuje primitivní funkce k f na Ω ;*
- ❷ *pro každou uzavřenou křivku $C \subseteq \Omega$ je*

$$\int_C f(z) \, dz = 0;$$

- ❸ *křivkový integrál funkce f nezávisí na cestě v Ω .*

Důkaz: Viz přednáška. ■

Jednoduchá souvislost

Věta (Jordanova věta)

Je-li C Jordanova křivka v $\mathbb{C}$, pak $\mathbb{C} \setminus C$ je sjednocení omezené oblasti $\text{Int } C$ a neomezené oblasti $\text{Ext } C$, které nemají žádný společný prvek.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Terminologie:

- $\text{Int } C \dots$ **vnitřek** Jordanovy křivky C .
- $\text{Ext } C \dots$ **vnějšek** Jordanovy křivky C .

Definice (jednoduše souvislá oblast)

Říkáme, že oblast $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je **jednoduše souvislá**, jestliže pro každou Jordanovu křivku $C \subseteq \Omega$ je $\text{Int } C \subseteq \Omega$.

Příklad

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$. Okolí $U(z_0)$ je jednoduše souvislá oblast. Okolí $U(\infty)$ a prstencové okolí $P(z_0)$ nejsou jednoduše souvislé oblasti.

Cauchyova věta a některé její důsledky

Věta (Cauchyova věta)

Je-li $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ jednoduše souvislá oblast a f je holomorfní na Ω , pak

$$\int_C f(z) \, dz = 0$$

pro každou uzavřenou křivku ležící v Ω .

Důkaz: Viz přednáška (za dodatečných předpokladů: C je Jordanova křivka a f' je spojitá na Ω). ■

- Předpoklad jednoduché souvislosti Ω podstatný!
- Holomorfní funkce na jednoduše souvislé oblasti má primitivní funkci.

Příklad

Je-li C kladně orientovaná kružnice se středem 0 a poloměrem 1, pak

$$\int_C \frac{e^{\sin z}}{z^2 + 16} \, dz = 0.$$

Cauchyova věta a některé její důsledky

Tvrzení (Princip deformace)

Předpokládejme, že C_1 a C_2 jsou kladně orientované Jordanovy křivky v jednoduše souvislé oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ takové, že $C_1 \subseteq \text{Int } C_2$. Necht' $z_0 \in \text{Int } C_1$ a f je holomorfní v $\Omega \setminus \{z_0\}$, pak

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

Pro každé $n \in \mathbb{Z}$ a každou kladně orientovanou Jordanovu křivku C mající ve svém vnitřku bod z_0 platí

$$\int_C (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{je-li } n = -1; \\ 0 & \text{je-li } n \neq -1. \end{cases}$$

Cauchyova věta a některé její důsledky

Věta (Cauchyho vzorec)

Nechť f je holomorfní v jednoduše souvislé oblasti Ω , $C \subseteq \Omega$ je kladně orientovaná Jordanova křivka a $z_0 \in \text{Int } C$. Potom f má v z_0 derivace všech řádů a pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Důkaz: Viz přednáška. (Pro $n \geq 1$ jen idea důkazu.) ■

Příklad

Je dána kladně orientovaná kružnice C o rovnici $|z| = 2$. Pak

- ① $\int_C \frac{z^2 - 4z + 4}{z + i} dz = \pi(-8 + 6i).$
- ② $\int_C \frac{z^2 - 4z + 4}{(z + i)^2} dz = -\pi(-4 + 8i).$

Cauchyova věta a některé její důsledky

Věta (existence všech derivací)

Jestliže f je holomorfní na otevřené množině $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, pak má f na Ω derivace všech řádů.

Důkaz: Viz přednáška. ■

- Je-li f holomorfní na otevřené množině $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, pak její reálná a imaginární část jsou funkce třídy C^∞ na Ω .

Věta (Moreroва věta)

Jestliže komplexní funkce f je spojitá na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ a pro každou uzavřenou křivku $C \subseteq \Omega$ je $\int_C f(z) dz = 0$, potom f je holomorfní na Ω .

Důkaz: Viz přednáška. ■

Věta (Liouvillova věta)

Omezená celistvá funkce je konstantní.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Cauchyova věta a některé její důsledky

- Připomeňme, že $z_0 \in \mathbb{C}$ je **kořen polynomu P** , jestliže $P(z_0) = 0$.

Věta (Základní věta algebry)

Každý nekonstantní polynom má alespoň jeden komplexní kořen.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Důsledek

Ať $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ je polynom stupně $n \geq 1$. Pak existují přirozená čísla $n_1, \dots, n_k$ a navzájem různá komplexní čísla $z_1, \dots, z_k$ tak, že $n = n_1 + \dots + n_k$ a

$$P(z) = a_n (z - z_1)^{n_1} (z - z_2)^{n_2} \dots (z - z_k)^{n_k}.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

- Přirozené číslo n_j , kde $j \in \{1, \dots, k\}$, se nazývá **násobnost kořene z_j polynomu P** .