

# Komplexní analýza a transformace

## Mocninné řady

Martin Bohata

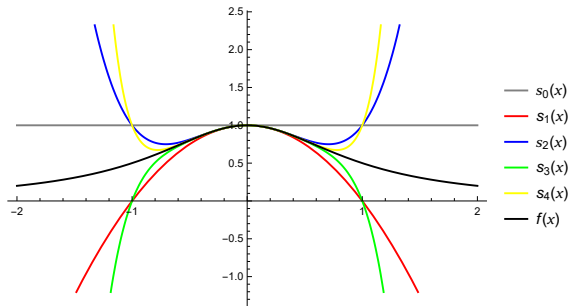
Katedra matematiky  
FEL ČVUT v Praze  
martin.bohata@fel.cvut.cz

# Motivace

- Z teorie mocninných řad v reálném oboru víme, že pro každé  $x \in (-1, 1)$  je

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

- Ať  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  a  $s_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k}$ . Z obrázku vidíme, že mimo interval  $(-1, 1)$  řada nekonverguje. Může to souviset s tím, že komplexní funkce  $\frac{1}{1+z^2}$  není definována v  $\pm i$ ?



# Řady komplexních čísel

- $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \dots$  (nekonečná) řada komplexních čísel  $a_n \in \mathbb{C}$ .
- $(\sum_{k=0}^n a_k)_{n=0}^{+\infty} \dots$  posloupnost částečných součtů řady  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ .
- Číslo  $s \in \mathbb{C}$  se nazývá součet řady  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  komplexních čísel, má-li její posloupnost částečných součtů konečnou limitu  $s$ . Píšeme  $s = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ .
- Říkáme, že řada komplexních čísel konverguje, jestliže existuje její součet. V opačném případě říkáme, že řada diverguje.

## Tvrzení (nutná podmínka konvergence)

Jestliže  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  konverguje, pak  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ .

Důkaz: Viz přednáška. ■

# Řady komplexních čísel

## Definice (absolutní konvergence)

Říkáme, že řada  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  **konverguje absolutně**, jestliže  $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$  konverguje.

## Tvrzení (o vztahu konvergence a absolutní konvergence)

*Jestliže řada komplexních čísel konverguje absolutně, potom konverguje.*

Důkaz: Viz přednáška. ■

## Tvrzení (srovnávací kritérium)

*Nechť  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  je řada komplexních čísel. Jestliže řada  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$  nezáporných reálných čísel konverguje a  $|a_n| \leq b_n$  pro každé  $n \in \mathbb{N}_0$ , pak  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  konverguje absolutně.*

Důkaz: Viz přednáška. ■

# Řady komplexních čísel

## Tvrzení (podílové kritérium)

Nechť  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  je řada nenulových komplexních čísel a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \in [0, +\infty].$$

- ❶ Jestliže  $L < 1$ , pak  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  konverguje absolutně.
- ❷ Jestliže  $L > 1$ , pak  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  diverguje.

Důkaz: Vynecháváme. (Důkaz stejný jako v reálném oboru.) ■

## Příklad

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!}$  konverguje absolutně.

# Řady komplexních čísel

## Tvrzení (odmocninové kritérium)

*Nechť  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  je řada komplexních čísel a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \in [0, +\infty].$$

- ❶ *Jestliže  $L < 1$ , pak  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  konverguje absolutně.*
- ❷ *Jestliže  $L > 1$ , pak  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  diverguje.*

Důkaz: Vynecháváme. (Důkaz stejný jako v reálném oboru.) ■

- Připomeňme, že  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

## Příklad

$\sum_{n=0}^{+\infty} n(1+i)^n$  diverguje.

# Řady komplexních funkcí

Ať  $(f_n)_{n=0}^{+\infty}$  je posloupnost komplexních funkcí  $f_n : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  a  $w \in D$ .

- $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  ... **nekonečná řada komplexních funkcí  $f_n$** .
- $(\sum_{k=0}^n f_k)_{n=0}^{+\infty}$  ... **posloupnost částečných součtů řady  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$** .
- $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  **konverguje** (resp. **absolutně konverguje**) **v bodě  $w$** , jestliže řada  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(w)$  komplexních čísel konverguje (resp. absolutně konverguje).
- $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  **diverguje v bodě  $w$** , jestliže řada  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(w)$  komplexních čísel diverguje.
- Konverguje-li (resp. konverguje-li absolutně)  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  v každém bodě množiny  $M \subseteq D$ , pak říkáme, že  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  **konverguje** (resp. **konverguje absolutně**) **na  $M$** .
- Funkce  $f : M \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  se nazve **součet řady  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  na  $M$** , jestliže

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n f_k(z).$$

pro každé  $z \in M$ . Píšeme  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ .

# Mocninné řady

## Definice (mocninná řada)

Ať  $z_0 \in \mathbb{C}$  a  $a_n \in \mathbb{C}$  pro každé  $n \in \mathbb{N}_0$ . **Mocninná řada se středem  $z_0$  a koeficienty  $a_n$**  je řada komplexních funkcí  $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$ , tj. jedná se o řadu tvaru

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

## Příklad (Geometrická řada)

Je dána mocninná řada  $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ .

- 1 Pro každé  $z \in \mathbb{C}$  splňující  $|z| \geq 1$  uvedená řada diverguje.
- 2 Pro každé  $z \in \mathbb{C}$  splňující  $|z| < 1$  uvedená řada konverguje absolutně a platí

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}.$$

# Poloměr konvergence

## Tvrzení (o konvergenci mocninné řady)

Konverguje-li řada  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$  v bodě  $w \in \mathbb{C}$ , pak absolutně konverguje na množině  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < |w - z_0|\}$ .

Důkaz: Viz přednáška. ■

## Definice (poloměr konvergence)

Poloměr konvergence mocninné řady  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$  je číslo

$$R = \sup \left\{ r \in [0, +\infty) \mid \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n \text{ konverguje} \right\} \in [0, +\infty].$$

Množina  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$  se nazývá **kruh konvergence mocninné řady**  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ .

- Pro  $R \in (0, +\infty)$  je kruh konvergence okolí  $U(z_0; R)$ .
- Kruh konvergence budeme značit  $U(z_0; R)$  i pro  $R = +\infty$ .

# Poloměr konvergence

## Věta (význam poloměru konvergence)

*Ať mocninná řada  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$  má poloměr konvergence  $R$ . Potom  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$*

- ❶ *konverguje absolutně pro každé  $z \in \mathbb{C}$  splňující  $|z - z_0| < R$ ;*
- ❷ *diverguje pro každé  $z \in \mathbb{C}$  splňující  $|z - z_0| > R$ .*

Důkaz: Viz přednáška. ■

## Příklad

- ❶  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n}{i^n} (z - 1 + 2i)^n \dots R = 0.$
- ❷  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n} \dots R = 1.$
- ❸  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \dots R = +\infty.$

# Stejněoměrná konvergence

## Definice (stejněoměrná konvergence řady funkcí)

Ať  $D \subseteq \mathbb{C}$  a množina  $M \subseteq D$  je neprázdná. Řekneme, že řada  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  komplexních funkcí  $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$  **konverguje stejnoměrně na  $M$** , jestliže existuje  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  tak, že

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{z \in M} \left| f(z) - \sum_{k=0}^n f_k(z) \right| = 0.$$

Konverguje-li řada  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  stejnoměrně na  $M$ , pak

- 1 konverguje na  $M$ ;
- 2 konverguje stejnoměrně na každé neprázdné množině  $N \subseteq M$ ;
- 3 funkce  $f$  v definici stejnoměrné konvergence je součet řady  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  na  $M$ .

# Stejněměrná konvergence

## Věta (Weierstrassovo kritérium)

*Ať  $D \subseteq \mathbb{C}$ , množina  $M \subseteq D$  je neprázdná,  $(f_n)_{n=0}^{+\infty}$  je posloupnost komplexních funkcí  $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$  a pro každé  $n \in \mathbb{N}_0$  existuje kladné reálné číslo  $\lambda_n$  tak, že pro každé  $z \in M$  je  $|f_n(z)| \leq \lambda_n$ . Jestliže  $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n$  konverguje, potom  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  konverguje stejnoměrně na  $M$ .*

Důkaz: Viz přednáška. ■

## Věta (záměna sumy a křivkového integrálu)

*Jestliže řada  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  komplexních funkcí spojitých na křivce  $C \subseteq \mathbb{C}$  konverguje stejnoměrně na  $C$ , pak její součet je spojitá funkce na  $C$  a platí*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_C f_n(z) \, dz = \int_C \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z) \, dz.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

# Stejněoměrná konvergence

## Příklad

Geometrická řada  $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$  nekonverguje stejněoměrně na svém kruhu konvergence  $U(0; 1)$ . Avšak konverguje stejněoměrně na  $U(0; r)$  pro každé  $r \in (0, 1)$ .

## Věta (stejněoměrná konvergence mocninné řady)

*Má-li mocninná řada  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$  poloměr konvergence  $R > 0$ , pak konverguje stejněoměrně na  $U(z_0, r)$  pro každé  $r \in (0, R)$ .*

Důkaz: Viz přednáška. ■

# Operace s mocninnými řadami

## Tvrzení (součet mocninných řad)

*At'  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$  má poloměr konvergence  $R_1 > 0$ ,  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z - z_0)^n$  má poloměr konvergence  $R_2 > 0$  a*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad z \in U(z_0; R_1),$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z - z_0)^n, \quad z \in U(z_0; R_2).$$

*Potom  $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)(z - z_0)^n$  má poloměr konvergence nejméně  $R = \min\{R_1, R_2\}$  a*

$$f(z) + g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)(z - z_0)^n, \quad z \in U(z_0; R).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

## Věta (derivování člen po členu)

*Jestliže mocninná řada  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$  má poloměr konvergence  $R > 0$  a  $f$  je její součet na  $U(z_0; R)$ , potom*

- ❶  $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$  má poloměr konvergence  $R$ ;
- ❷  $f$  je holomorfní na  $U(z_0; R)$  a  $f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$  pro každé  $z \in U(z_0; R)$ ;
- ❸  $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$  pro každé  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Důkaz: Viz přednáška. ■

# Operace s mocninnými řadami

## Důsledek (princip neurčitých koeficientů)

*Jestliže  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$  a  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z - z_0)^n$  mají stejný součet na nějakém okolí  $U(z_0)$ , pak  $a_n = b_n$  pro všechna  $n \in \mathbb{N}_0$ .*

Důkaz: Viz přednáška. ■

- Koeficienty mocninné řady jsou určeny jen chováním jejího součtu na libovolně malém okolí bodu  $z_0$ .

## Příklad

Je dána rovnice  $f'(z) = 2zf(z)$  a počáteční podmínka  $f(0) = 1$ . Její řešení (na  $\mathbb{C}$ ) je  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{n!}$ .

# Operace s mocninnými řadami

## Věta (integrování člen po členu)

Jestliže mocninná řada  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$  má poloměr konvergence  $R > 0$  a  $f$  je její součet na  $U(z_0; R)$ , potom

- 1  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$  má poloměr konvergence  $R$ ;
- 2 Součet  $F$  mocninné řady  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$  na  $U(z_0; R)$  je primitivní funkce k funkci  $f$  na  $U(z_0; R)$ , tj.  $F' = f$  na  $U(z_0; R)$ .

Důkaz: Viz přednáška. ■

## Příklad

- 1 Řada  $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)z^n$  má součet  $\frac{1}{(1-z)^2}$  pro  $|z| < 1$ .
- 2 Řada  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$  má součet  $-\ln(1-z)$  pro  $|z| < 1$ .

# Reprezentace holomorfní funkce mocninnou řadou

## Definice (Taylorova řada)

Ať funkce  $f$  má derivace všech řádů v bodě  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Mocninná řada  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$  se nazývá **Taylorova řada funkce  $f$  o středu  $z_0$** .

## Věta (existence Taylorova rozvoje)

*Nechť  $z_0 \in \mathbb{C}$  a  $R > 0$  je takové, že  $f(z)$  je holomorfní funkce na  $U(z_0; R)$ . Potom*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

*pro všechna  $z \in U(z_0; R)$ .*

Důkaz: Viz přednáška. ■

# Reprezentace holomorfní funkce mocninnou řadou

- Taylorova řada z právě uvedené věty se také někdy nazývá **rozvoj** funkce  $f$  do mocninné řady na  $U(z_0; R)$ .
- Holomorfní funkce jsou lokálně „nekonečné polynomy“.

## Příklad

- 1  $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, z \in \mathbb{C}.$
- 2  $\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, z \in \mathbb{C}.$
- 3  $\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, z \in \mathbb{C}.$
- 4  $\ln z = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$  pro  $|z-1| < 1.$
- 5  $\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n}$  pro  $|z| < 1.$

# Operace s mocninnými řadami – pokračování

## Tvrzení (součin mocninných řad)

*At'  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$  má poloměr konvergence  $R_1 > 0$ ,  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z - z_0)^n$  má poloměr konvergence  $R_2 > 0$ ,  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$  a*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad z \in U(z_0; R_1),$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z - z_0)^n, \quad z \in U(z_0; R_2).$$

*Potom  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$  má poloměr konvergence nejméně  $R = \min\{R_1, R_2\}$  a*

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad z \in U(z_0; R).$$

Důkaz: Viz přednáška. 

# Kořeny holomorfní funkce

- Připomeňme, že  $z_0 \in \mathbb{C}$  je kořen násobnosti  $k \in \mathbb{N}$  nenulového polynomu  $P$  právě tehdy, když existuje polynom  $Q$  tak, že  $P(z) = (z - z_0)^k Q(z)$  a  $Q(z_0) \neq 0$ .

## Definice (kořen násobnosti $k$ )

Ať  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $f$  je holomorfní funkce na okolí  $U(z_0)$  a  $k \in \mathbb{N}$ . Řekneme, že  $z_0$  je **kořen násobnosti  $k$  funkce  $f$** , jestliže existuje funkce  $g$  holomorfní na  $U(z_0)$  tak, že

- 1  $g(z_0) \neq 0$ ;
- 2  $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$  pro každé  $z \in U(z_0)$ .

- Je-li  $z_0$  kořen násobnosti  $k$  funkce  $f$ , potom existuje  $P(z_0)$  tak, že  $f(z) \neq 0$  pro každé  $z \in P(z_0)$ .
- Je-li  $z_0$  kořen násobnosti  $k$  funkce  $f$  a také kořen násobnosti  $l$  funkce  $g$ , pak  $z_0$  je kořen násobnosti  $k + l$  funkce  $fg$ .

# Kořeny holomorfní funkce

Je-li  $f$  holomorfní na  $U(z_0)$  a  $f(z_0) = 0$ , pak nastává právě jedna z možností:

- 1  $z_0$  je kořen násobnosti  $k \in \mathbb{N}$  funkce  $f$ ;
- 2  $f(z) = 0$  na  $U(z_0)$ .

## Tvrzení (derivace a kořen násobnosti $k$ )

*Ať  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $f$  je holomorfní funkce na okolí  $U(z_0)$  a  $k \in \mathbb{N}$ . Potom  $z_0$  je kořen násobnosti  $k$  funkce  $f$  právě tehdy, když  $f^{(l)}(z_0) = 0$  pro každé celé nezáporné číslo  $l < k$  a  $f^{(k)}(z_0) \neq 0$ .*

Důkaz: Viz přednáška. ■

## Příklad

- 1 Bod 0 je kořen násobnosti 2 funkce  $f(z) = z \sin z$ .
- 2 Bod  $2k\pi i$ , kde  $k \in \mathbb{Z}$ , je kořen násobnosti 1 funkce  $f(z) = 1 - e^z$ .

## Věta (o jednoznačnosti)

*At'  $f, g$  jsou holomorfní funkce na oblasti  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  a  $M \subseteq \Omega$  má hromadný bod ležící v  $\Omega$ . Jestliže  $f = g$  na  $M$ , pak  $f = g$  na  $\Omega$ .*

Důkaz: Viz přednáška. ■

## Příklad

Pro každé  $z \in \mathbb{C}$  platí  $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ .