

Komplexní analýza

Laplaceova transformace

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
martin.bohata@fel.cvut.cz

Motivace a definice

- Chceme formulovat analogii Z -transformace pro funkce $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$.
- Aplikace: řešení diferenciálních rovnic, teorie řízení,...

Definice (Laplaceova transformace)

Laplaceovou transformací funkce $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ rozumíme komplexní funkci $\mathcal{L}[f] = F$ definovanou předpisem

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-ts} dt,$$

jestliže $t \mapsto f(t)e^{-ts}$ je (lebesgueovsky) integrovatelná funkce na $[0, +\infty)$ pro alespoň jedno $s \in \mathbb{C}$.

- Jestliže $t \mapsto f(t)e^{-ts}$ je (lebesgueovsky) integrovatelná funkce na $[0, +\infty)$ pro nějaké $s_0 \in \mathbb{C}$, pak je také integrovatelná pro všechny $s \in \mathbb{C}$ splňující $\operatorname{Re} s \geq \operatorname{Re} s_0$.

Jednoduchý příklad

Příklad

Je-li $a \in \mathbb{C}$, potom

$$\mathcal{L} [e^{at}] (s) = \frac{1}{s - a},$$

kde $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$. Speciálně

$$\mathcal{L} [1] (s) = \frac{1}{s},$$

kde $\operatorname{Re} s > 0$.

Definice (po částech spojitá funkce)

Funkce $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ se nazve **po částech spojitá na intervalu** $I \subseteq \mathbb{R}$, jestliže pro každé $a, b \in I$ splňující $a < b$ existuje konečně mnoho bodů $t_0, \dots, t_n \in [a, b]$ tak, že

- ❶ $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$;
- ❷ pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$ je f spojitá na (t_{k-1}, t_k) ;
- ❸ $f(t_k+) = \lim_{t \rightarrow t_k+} f(t)$ je konečná pro každé $k \in \{0, \dots, n-1\}$;
- ❹ $f(t_k-) = \lim_{t \rightarrow t_k-} f(t)$ je konečná pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$.

Prostor L_0

Definice (prostor L_0)

Řekneme, že funkce $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ je **exponenciálního řádu**, jestliže existuje $\alpha \in \mathbb{R}$ a $M > 0$ tak, že $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ pro každé $t \in [0, \infty)$. Symbolem L_0 označíme množinu všech po částech spojitých funkcí $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$, které jsou exponenciálního řádu.

- Množina L_0 je uzavřená na lineární kombinace a (konečné) součiny (tj. je-li $f, g \in L_0$ a $\alpha \in \mathbb{C}$, pak $f + g, \alpha f, fg \in L_0$).
- Každá funkce z L_0 má Laplaceovu transformaci.

Příklad

- 1 $1, t, \sin t$ a $\cos t$ jsou v L_0 .
- 2 Každý polynom je v L_0 .
- 3 $e^{at} \in L_0$ pro každé $a \in \mathbb{C}$.
- 4 $e^{t^2} \notin L_0$.

Heavisideova funkce

Definice (Heavisideova funkce)

Funkce

$$\mathbf{1}(t) := \chi_{[0,+\infty)}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

se nazývá **Heavisideova funkce**.

- Úmluva: V dalším nebudeme rozlišovat mezi funkcí $f \in L_0$ a funkcí, která vznikne z f dodefinováním nulou na intervalu $(-\infty, 0)$.
- Je-li $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ taková, že $f|_{[0,\infty)} \in L_0$, pak podle naší úmluvy nerozlišujeme mezi $f|_{[0,\infty)}$ a $f \cdot \mathbf{1}$.
- Je-li $0 \leq a < b < +\infty$, pak

$$\chi_{[a,b)}(t) = \mathbf{1}(t - a) - \mathbf{1}(t - b).$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Tvrzení

Nechť $f, g \in L_0$ a $a \in \mathbb{C}$.

- ❶ $\mathcal{L} [f(t) + ag(t)](s) = \mathcal{L} [f(t)](s) + a\mathcal{L} [g(t)](s).$
- ❷ *Jestliže je a kladné reálné číslo, pak $\mathcal{L} [f(at)](s) = \frac{1}{a}\mathcal{L} [f(t)]\left(\frac{s}{a}\right).$*
- ❸ $\mathcal{L} [e^{at}f(t)](s) = \mathcal{L} [f(t)](s - a).$
- ❹ *Jestliže je a kladné reálné číslo, pak*
 $\mathcal{L} [f(t)\mathbf{1}(t - a)](s) = e^{-as}\mathcal{L} [f(t + a)](s).$

Důkaz: Viz přednáška. ■

- Bod ❹ lze (s využitím naší úmluvy) přepsat do tvaru

$$\mathcal{L} [f(t - a)\mathbf{1}(t - a)](s) = e^{-as}\mathcal{L} [f(t)](s).$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad

① Pro $\omega \in \mathbb{C}$ je

$$\mathcal{L} [\sin(\omega t)] (s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad \text{a} \quad \mathcal{L} [\cos(\omega t)] (s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

② Pro $a \in \mathbb{C}$ je

$$\mathcal{L} [e^{at} \sin t] (s) = \frac{1}{(s - a)^2 + 1}.$$

③ Pro $a > 0$ je

$$\mathcal{L} [\mathbf{1}(t - a)] (s) = \frac{e^{-as}}{s}.$$

④

$$\mathcal{L} [\mathbf{1}(t - 2)e^t] (s) = \frac{e^{-2(s-1)}}{s - 1}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta (O derivaci obrazu)

Jestliže $f \in L_0$, $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$,

$$\alpha_f = \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R} \mid f(t)e^{-\alpha t} \text{ je omezená na } [0, +\infty) \right\},$$
$$\Omega = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > \alpha_f\},$$

potom

① F je holomorfní na Ω ;

②

$$F'(s) = -\mathcal{L}[tf(t)](s) \quad \text{pro každé } s \in \Omega.$$

Důkaz: Viz přednáška (jen náznak důkazu bodu ②). ■

Příklad

$$\mathcal{L}[te^t](s) = \frac{1}{(s-1)^2}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta (O obrazu derivace)

Ať $f \in L_0$ je spojitá na $[0, +\infty)$. Jestliže f' je funkce z L_0 , která se rovná derivaci funkce f skoro všude na $[0, +\infty)$, pak

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

- Ať $n \in \mathbb{N}$ a $f, f', \dots, f^{(n-1)} \in L_0$ jsou spojité na $[0, +\infty)$. Jestliže $f^{(n)}$ je funkce z L_0 , která se rovná derivaci funkce $f^{(n-1)}$ skoro všude na $[0, +\infty)$, pak

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) = s^n \mathcal{L}[f(t)](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0).$$

Příklad

$$\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta (O obrazu periodické funkce)

Jestliže $f \in L_0$ je periodická funkce (na intervalu $[0, \infty)$) s periodou $T > 0$ (tj. $f(t + T) = f(t)$ pro každé $t \in [0, \infty)$), pak

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{\int_0^T f(t)e^{-st} dt}{1 - e^{-sT}}.$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

Příklad

Ať

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [2k - 2, 2k - 1), \\ 0, & t \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [2k - 1, 2k). \end{cases}$$

Potom

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - e^{-2s})}.$$

Konvoluce

Definice (konvoluce)

Nechť $f, g \in L_0$. Funkce $h = f * g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$h(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) \, d\tau$$

se nazve **konvoluce** funkcí f a g .

Jestliže $f, g, h \in L_0$, pak

- $f * g \in L_0$;
- $f * g = g * f$;
- $f * (g * h) = (f * g) * h$.

Příklad

$$t * 1 = \frac{t^2}{2}.$$

Věta (O obrazu konvoluce)

Jestliže $f, g \in L_0$, potom

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s) \mathcal{L}[g(t)](s).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

- ① $\mathcal{L}[1 * 1](s) = \frac{1}{s^2}.$
- ② $\mathcal{L}[t * e^t](s) = \frac{1}{s^2(s-1)}.$

- Neexistuje žádná funkce $\delta \in L_0$ tak, aby $\mathcal{L}[\delta(t)](s) = 1.$

Pohádka o Diracovi

Ať $a \in \mathbb{R}$. Diracova funkce $\delta_a(t)$ by měla být funkce splňující

$$f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t) f(t) dt$$

pro každou spojitou funkci f na $\mathbb{R}$. Speciálně tedy

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t) dt$$

- Místo $\delta_0(t)$ se píše jen $\delta(t)$. Často se také místo $\delta_a(t)$ píše $\delta(t - a)$.
- Diracova funkce $\delta_a(t)$ ale nemůže být obyčejná funkce. Naivní pohled

$$\delta_a(t) = \begin{cases} 0, & t \neq a, \\ +\infty, & t = a, \end{cases}$$

vede ke sporu s požadavkem $1 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t) dt$.

- Diracova funkce je ale objekt, který lze v jistém smyslu aproximovat pomocí vhodné posloupnosti funkcí.

Pohádka o Diracovi

Ať $\varphi_n(t) = n\chi_{[a, a+\frac{1}{n}]}(t)$.

- Pro každou spojitou funkci f na $\mathbb{R}$ máme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi_n(t) dt = f(a).$$

- Uvedená aproximace Diracovy funkce pomocí posloupnosti funkcí φ_n není jediná možná.
- Je-li $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$ a f je vhodná (ne nutně spojitá) funkce, pak

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) \delta_a(t) dt := \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) \varphi_n(t) dt$$

- Ať $a \geq 0$ a $f \in L_0$. Pak

$$\begin{aligned}(\delta_a * f)(t) &= f(t - a); \\ \mathcal{L}[\delta_a(t)](s) &= e^{-as}.\end{aligned}$$

Speciálně $\delta * f = f$ a $\mathcal{L}[\delta(t)](s) = 1$.

Inverzní Laplaceova transformace

- Nechť komplexní funkce $F(s)$ je Laplaceova transformace nějaké funkce z L_0 . Jak najít její vzor?
- Pro nalezení vzoru potřebujeme najít řešení integrální rovnice

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

- Vzor není určen jednoznačně (funkce z L_0 lišící se na množině míry 0 mají stejnou Laplaceovu transformaci).

Věta (Lerchova věta)

Jestliže $f, g \in L_0$ jsou spojité zprava v každém bodě intervalu $[0, \infty)$ a mají stejnou Laplaceovu transformaci, pak $f = g$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Inverzní Laplaceova transformace

Věta (O inverzi)

Nechť $f \in L_0$ (dodefinovaná nulou na $(-\infty, 0)$),

$$\alpha_f = \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} \mid f(t)e^{-\alpha t} \text{ je omezená na } [0, +\infty) \}$$

a f' je po částech spojitá na $[0, \infty)$. Jestliže $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$, potom

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s)e^{ts} ds := \frac{1}{2\pi i} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{L(a,b)} F(s)e^{ts} ds,$$

kde $a > \alpha_f$ a $L(a, b)$ je úsečka s parametrizací $\varphi(\tau) = a + i\tau$, $\tau \in [-b, b]$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

- $\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s)e^{ts} ds$ se nazývá **Riemannův-Mellinův vzorec** a přímka $\operatorname{Re} s = a$ se nazývá **Bromwichova linie**.

Inverzní Laplaceova transformace – metoda reziduí

Hledání Laplaceova vzoru $f(t)$ funkce $F(s)$ pomocí tzv. **metody reziduí**.
Předpokládejme, že:

- 1 F se dá rozšířit na funkci holomorfní na $\mathbb{C} \setminus M$, kde M je spočetná množina obsahující pouze izolované singularity rozšíření funkce F .
- 2 Existuje posloupnost polokružnic

$$K_n = \{s \in \mathbb{C} \mid |s - a| = R_n, \operatorname{Re} s \leq a\}$$

s poloměry R_n tak, že $R_n \rightarrow +\infty$ pro $n \rightarrow +\infty$ a pro každé $t > 0$ je

$$\int_{K_n} F(s) e^{st} ds \rightarrow 0 \quad \text{pro } n \rightarrow +\infty.$$

Potom pro každé $t > 0$ je

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s) e^{ts} ds = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{w \in M_n} \operatorname{res}_w F(s) e^{st},$$

kde $M_n = \{s \in M \mid |s - a| < R_n\}$.

Inverzní Laplaceova transformace – metoda reziduí

Ať P, Q jsou polynomy splňující $\text{st } P < \text{st } Q$. Metodu reziduí lze použít například, je-li

- $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$;
- $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \frac{1}{1 \pm e^{-Ts}}$, kde $T > 0$;

Příklad

- ❶ Laplaceův vzor k $F(s) = \frac{1}{s(s-1)}$ je

$$f(t) = e^t - 1.$$

- ❷ Laplaceův vzor k $F(s) = \frac{2s+3}{s^2+1}$ je

$$f(t) = 2 \cos t + 3 \sin t.$$

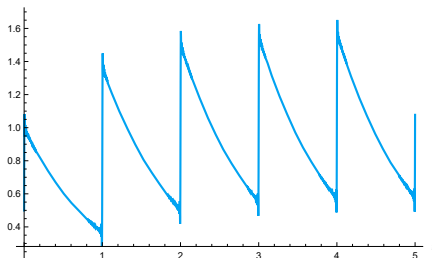
Inverzní Laplaceova transformace – metoda reziduí

Příklad

Ať $F(s) = \frac{1}{(s+1)(1-e^{-s})}$. Vzor k této funkci je

$$f(t) = \frac{1}{1-e}e^{-t} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi int}}{2\pi in + 1}.$$

Aproximace f tvaru $\frac{1}{1-e}e^{-t} + \sum_{n=-100}^{100} \frac{e^{2\pi int}}{2\pi in + 1}$ má graf:



Inverzní Laplaceova transformace – metoda reziduí

- Avšak vzorec se součtem reziduí nelze použít vždy!
- Hledáme-li vzor f k $F(s) = G(s)e^{-as}$, nalezneme nejdříve vzor g k funkci G a poté využijeme toho, že $f(t) = g(t-a)\mathbf{1}(t-a)$.

Příklad

- 1 Pro $F(s) = \frac{e^{-s}}{s}$ je vzor $f(t) = \mathbf{1}(t-1)$, ale formální využití vzorce s rezidui by dalo funkci $t \mapsto 1$.
- 2 $F(s) = \frac{e^{-s}}{(s+1)(1-e^{-s})}$ má vzor

$$f(t) = \left[\frac{1}{1-e} e^{-(t-1)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n(t-1)}}{2\pi i n + 1} \right] \mathbf{1}(t-1).$$

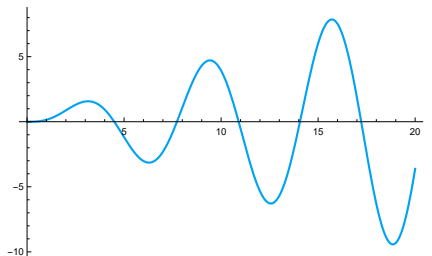
Příklad

Řešení rovnice

$$y''(t) + y(t) = \sin t$$

na intervalu $[0, +\infty)$, které splňuje počáteční podmínky $y(0) = y'(0) = 0$,
je

$$y(t) = \frac{1}{2} \sin t - \frac{t}{2} \cos t, \quad t \geq 0.$$



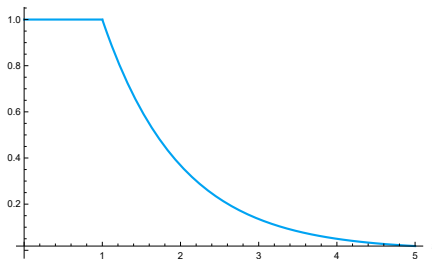
Příklad

Řešení rovnice

$$y'(t) + y(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - 1)$$

na intervalu $[0, +\infty)$, které splňuje počáteční podmínku $y(0) = 1$, je

$$y(t) = 1 - (1 - e^{1-t}) \mathbf{1}(t - 1), \quad t \geq 0.$$



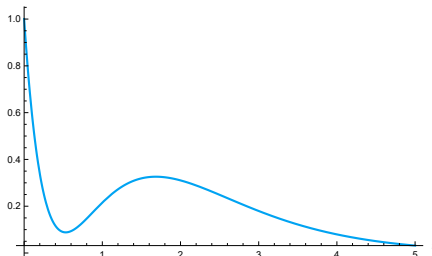
Příklad

Řešení rovnice

$$y(t) = e^{-t} - 4 \int_0^t \cos(2\tau) y(t - \tau) d\tau$$

na intervalu $[0, +\infty)$ je

$$y(t) = 5e^{-t} - 4e^{-2t} - 8te^{-2t}, \quad t \geq 0.$$



Příklad

Řešení rovnice

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

na $[0, +\infty) \times [0, \pi]$ splňující podmínky

- ❶ $y(t, 0) = y(t, \pi) = 0$ pro každé $t \geq 0$,
- ❷ $y(0, x) = \sin x$ pro každé $x \in [0, \pi]$,
- ❸ $\frac{\partial y}{\partial t}(0, x) = 0$ pro každé $x \in [0, \pi]$

je

$$y(t, x) = \cos t \sin x, \quad (t, x) \in [0, +\infty) \times [0, \pi].$$

Uvažme systém popsaný soustavou

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t),\end{aligned}$$

kde $\mathbf{A} \in \mathbb{M}_k(\mathbb{C})$, $\mathbf{B} \in \mathbb{M}_{k,1}(\mathbb{C})$ a $\mathbf{C} \in \mathbb{M}_{1,k}(\mathbb{C})$ jsou matice a u je vhodná funkce.

Terminologie:

- u ... **vstup**.
- $\mathbf{x}$... **stav**.
- y ... **výstup**.
- **Impulzní odezva** je výstup h systému odpovídající vstupu $u = \delta$, kde δ je Diracova funkce, a počáteční podmínce $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$.
- $H(s) = \mathcal{L}[h(t)](s)$... **přenosová funkce**.

Dále nebudeme rozlišovat mezi přenosovou funkcí a jejím holomorfním rozšířením na co největší oblast v $\mathbb{C}$.

- Je-li dán vstup u a počáteční podmínky $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, pak Laplaceova transformace výstupu je

$$Y(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s).$$

kde $U(s) = \mathcal{L}[u(t)](s)$.

- Přenosová funkce je proto racionální funkce tvaru

$$H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}.$$

- Póly funkce $H(s)$ jsou podmnožinou spektra matice $\mathbf{A}$.
- Řekneme, že systém je **stabilní**, jestliže existuje $M > 0$ tak, že pro $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ a pro každý omezený vstup $u \in L_0$ je

$$\sup_{t \in [0, +\infty)} |y(t)| \leq M \sup_{t \in [0, +\infty)} |u(t)|.$$

- Systém je stabilní právě tehdy, když všechny póly přenosové funkce leží v polorovině $\operatorname{Re} s < 0$.

- Uvažme lineární lomené zobrazení (nazývá se **Tustinova transformace**):

$$f(z) = \frac{2(z-1)}{T(z+1)},$$

kde $T > 0$.

- At' $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Pak

$$\begin{aligned} f(K) &= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 0\} \cup \{\infty\}, \\ f(U(0; 1)) &= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0\}. \end{aligned}$$

- Funkce

$$G(z) = H(f(z))$$

je přenosová funkce nějakého diskrétního systému.

- Platí, že diskrétní systém s přenosovou funkcí $G(z)$ je stabilní právě tehdy, když systém s přenosovou funkcí $H(s)$ je stabilní.