

Fourierova transformace

Zadání

1. Nalezněte Fourierovu transformaci funkce

- (a) $f(t) = e^{-|t|}$;
- (b) $f(t) = e^{-(t^2+2t)}$;
- (c) $f(t) = te^{-(t+5)^2}$;
- (d) $f(t) = \frac{1}{(1-it)^2}$;
- (e)

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{pro } t \in [-\pi, \pi], \\ 0 & \text{pro } |t| > \pi. \end{cases}$$

2. Je dána funkce

$$f(t) = \frac{1}{t^2 - 2t + 5}.$$

- (a) Nalezněte $\hat{f}(\omega)$.
- (b) Nalezněte inverzní Fourierovu transformaci funkce $f(t)$.
- (c) Nalezněte $\hat{g}(\omega)$, kde $g(t) = f'(t) \sin t + f(-4t + 3)$.

3. Je dána funkce $f(t) = t(\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-1))$, $t \in \mathbb{R}$.

- (a) Stanovte Fourierovu transformaci funkce $f(t)$.
- (b) Stanovte inverzní Fourierovu transformaci funkce $g(t) = f(2t+1)$.
- (c) Pomocí bodu (a) stanovte komplexní Fourierovy koeficienty funkce $h(t)$, která je zúžením funkce $f(t)$ na interval $[0, 1]$.

4. Jsou dány funkce $f(t) = \mathbf{1}(t+1) - \mathbf{1}(t-1)$ a $g(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-1)$.

- (a) Vypočtěte $h(t) = (f * g)(t)$.
- (b) Vypočtěte Fourierovu transformaci funkce $h(t) = (f * g)(t)$.
- (c) Pomocí bodu (b) stanovte komplexní Fourierovy koeficienty funkce, která je zúžením funkce $h(t) = (f * g)(t)$ na interval $[-1, 2]$.

5. Je dána funkce $f(t) = e^{-at}\mathbf{1}(t)$, kde $a > 0$.

- (a) Nalezněte Fourierův obraz funkce $f(t)$.
- (b) Nalezněte Fourierovu transformaci funkce $h(t) = (f_1 * f_2)(t)$, kde $f_1(t) = e^{-t}\mathbf{1}(t)$ a $f_2(t) = e^{-2t}\mathbf{1}(t)$.
- (c) Nalezněte funkci $h(t)$.

6. Je dána funkce

$$f(t) = \frac{t}{(t^2 + 1)^2}.$$

(a) Vypočtete $\hat{f}(\omega)$.

(b) Nalezněte Fourierovu transformaci funkce $h(t) = (f'' * g)(t)$, kde $g(t) = e^{(-t^2+3it)}$.

7. Je dána funkce

$$f(t) = e^{-t^2} * [\mathbf{1}(t+2) - \mathbf{1}(t-2)].$$

(a) Vypočtete $\hat{f}(\omega)$.

(b) Nalezněte spojitou funkci $g \in L^1(\mathbb{R})$ tak, aby $\hat{g}(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega)$.

8. Pomocí Fourierovy transformace nalezněte funkci $g = f * f$, kde $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

9. Pomocí Fourierovy transformace nalezněte řešení $y \in L^1(\mathbb{R})$ diferenciální rovnice

$$y''(t) - y(t) = e^{-t} \mathbf{1}(t)$$

na intervalu $(-\infty, \infty)$.

10. Pomocí Fourierovy transformace nalezněte řešení $y \in L^1(\mathbb{R})$ rovnice

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-\tau)^2} y(\tau) d\tau = e^{-t^2}.$$

11. Pomocí Fourierovy transformace nalezněte řešení $y \in L^1(\mathbb{R})$ rovnice

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|} y(t-\tau) d\tau = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

12. Fourierova transformace spojitě funkce $h \in L^1(\mathbb{R})$ je

$$\hat{h}(\omega) = \frac{4}{(\omega + 3i)(\omega - i)}.$$

Pomocí Fourierovy transformace nalezněte řešení diferenciální rovnice

$$y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = h(t).$$

13. Pomocí Fourierovy transformace nalezněte řešení $y \in L^1(\mathbb{R})$ diferenciální rovnice

$$y^{(4)}(t) + 4y(t) = \mathbf{1}(t+\pi) - \mathbf{1}(t-\pi).$$

14. Je dána funkce $f(t) = \frac{t}{t^2+1}$.

(a) Ukažte, že $f \notin L^1(\mathbb{R})$, ale $f \in L^2(\mathbb{R})$.

(b) Vypočtete Fourierovu transformaci funkce $f(t)$ a nakreslete graf její imaginární části.

(c) Vypočtete Fourierovu transformaci funkce $g(t) = f(t) \sin(2t)$.

Výsledky

1. (a) $\hat{f}(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$;
 (b) $\hat{f}(\omega) = \sqrt{\pi}e^{i(\omega+1)-\frac{\omega^2}{4}}$;
 (c) $\hat{f}(\omega) = i\sqrt{\pi}(5i - \frac{\omega}{2})e^{5i\omega}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$;
 (d) $\hat{f}(\omega) = 2\pi\omega e^{-\omega}\mathbf{1}(\omega)$;
 (e) $\hat{f}(\omega) = -2i\frac{\sin(\omega\pi)}{1-\omega^2}$ pro $\omega \neq \pm 1$, $\hat{f}(-1) = i\pi$ a $\hat{f}(1) = -i\pi$.
2. (a) $\hat{f}(\omega) = \frac{\pi}{2}e^{-2|\omega|}e^{-i\omega}$.
 (b) $\check{f}(\omega) = \frac{1}{4}e^{-2|\omega|}e^{i\omega}$.
 (c) $\hat{g}(\omega) = \frac{\omega-1}{2}\hat{f}(\omega-1) - \frac{\omega+1}{2}\hat{f}(\omega+1) + \frac{1}{4}e^{-\frac{3i\omega}{4}}\hat{f}(-\frac{\omega}{4})$.
3. (a) $\hat{f}(\omega) = e^{-i\omega}(\frac{i}{\omega} + \frac{1}{\omega^2}) - \frac{1}{\omega^2}$ pro $\omega \neq 0$; $\hat{f}(0) = \frac{1}{2}$.
 (b) $\check{g}(\omega) = -\frac{i}{2\pi\omega} + \frac{1}{\pi\omega^2} - \frac{1}{\pi\omega^2}e^{-i\frac{\omega}{2}}$ pro $\omega \neq 0$; $\check{g}(0) = \frac{1}{8\pi}$.
 (c) $c_0 = \frac{1}{2}$ a $c_n = \frac{i}{2\pi n}$ pro $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
4. (a) $h(t) = 0$ pro $t \in (-\infty, -1) \cup [2, \infty)$, $h(t) = t+1$ pro $t \in [-1, 0)$, $h(t) = 1$ pro $t \in [0, 1)$ a $h(t) = 2-t$ pro $t \in [1, 2)$.
 (b) $\hat{h}(\omega) = \frac{2\sin(\omega)}{\omega} \frac{e^{i\omega}-1}{i\omega}$ pro $\omega \neq 0$ a $\hat{h}(0) = 2$ pro $\omega = 0$.
 (c) $c_n = \frac{1}{3}\hat{h}(\frac{2\pi n}{3})$.
5. (a) $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{a+i\omega}$.
 (b) $\hat{h}(\omega) = -\frac{1}{(\omega-i)(\omega-2i)}$.
 (c) $h(t) = (e^{-t} - e^{-2t})\mathbf{1}(t)$.
6. (a) $\hat{f}(\omega) = \frac{i\pi}{2}\omega e^{-|\omega|}$;
 (b) $\hat{h}(\omega) = -\frac{i\pi\sqrt{\pi}}{2}\omega^3 e^{-|\omega|-\frac{(\omega-3)^2}{4}}$.
7. (a) $\hat{f}(\omega) = 2\frac{\sin(2\omega)}{\omega}e^{-\frac{\omega^2}{4}} = \frac{1}{i\omega} \left[e^{-\frac{\omega^2}{4}+2i\omega} - e^{-\frac{\omega^2}{4}-2i\omega} \right]$.
 (b) $g(t) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left(e^{-(t+2)^2} - e^{-(t-2)^2} \right)$.
8. $g(t) = \frac{2\pi}{4+t^2}$.
9. $y(t) = -\frac{t}{2}e^{-t}\mathbf{1}(t) - \frac{1}{4}e^{-|t|}$.
10. $y(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-2t^2}$.
11. $y(t) = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)e^{-\frac{x^2}{2}}$.
12. $y(t) = \begin{cases} \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{8}\right)e^{3t} + \frac{1}{2}e^t, & t < 0; \\ \frac{1}{8}e^{-t}, & t \geq 0. \end{cases}$

13.

$$y(t) = \begin{cases} \frac{e^{-\pi} - e^{\pi}}{8} e^t \cos t, & t \leq -\pi, \\ \frac{1}{8} [2 + e^{-(t+\pi)} \cos t + e^{t-\pi} \cos t], & t \in (-\pi, \pi), \\ \frac{e^{-\pi} - e^{\pi}}{8} e^{-t} \cos t, & t \geq \pi. \end{cases}$$

14. (b) $\hat{f}(\omega) = -i\pi \operatorname{sgn}(\omega) e^{-a|\omega|}.$

(c) $\hat{g}(\omega) = \frac{1}{2i} \left(\hat{f}(\omega - 2) - \hat{f}(\omega + 2) \right).$