

Komplexní funkce

Zadání

1. Je dána funkce

$$f(z) = \frac{1}{\bar{z}}.$$

Nalezněte reálnou a imaginární část této funkce a interpretujte f geometricky. Dále nalezněte obraz přímky $\operatorname{Im} z = 2$.

2. Nalezněte reálnou a imaginární část funkce

$$f(z) = \frac{2z^2 + 3}{|z - 1|}$$

a rozhodněte, zda

$$i \in M = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} f(z) \geq 0, \operatorname{Im} f(z) = 0\}.$$

3. Nalezněte reálnou a imaginární část funkce

$$f(z) = |z| + \frac{z - i}{z + 1}$$

a rozhodněte, zda

$$2i \in M = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} f(z) \geq 1, \operatorname{Im} f(z) < 0\}.$$

4. Rozhodněte, zda existuje limita $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Im} z}{z}$. Pokud ano, spočtěte ji.
5. Ukažte, že funkce $f(z) = \arg z$ není v bodě -1 spojitá.
6. Nalezněte všechny body, ve kterých je funkce $f(z)$ diferencovatelná, a v těchto bodech vypočtěte $f'(z)$, jestliže
- (a) $f(z) = x^2 + iy^2$;
 - (b) $f(z) = \operatorname{Re}(z^2) - i\operatorname{Im}(z^2)$.
7. Nalezněte hodnoty parametrů $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$f(z) = \frac{3}{2}x^2 - i\alpha xy + \beta y^2$$

byla celistvá funkce.

8. Je dána funkce

$$f(z) = x(x^2 - \alpha y^2) + iy(\beta x^2 - y^2),$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou parametry. Nalezněte všechny hodnoty parametrů α, β tak, aby $f(z)$ byla

- (a) diferencovatelná na přímce o rovnici $\operatorname{Im} z = 0$;
- (b) celistvá.

9. Nalezněte všechny celistvé funkce f tak, aby jejich reálná část byla

$$u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2.$$

10. Nalezněte celistvou funkci f tak, aby její reálná část byla

$$u(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 2xy \text{ a } f(0) = 2i.$$

11. Je dána funkce

$$u(x, y) = \sinh x \sin y.$$

(a) Ukažte, že u je harmonická na $\mathbb{R}^2$.

(b) Nalezněte funkci $v(x, y)$ tak, aby $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ byla celistvá a $f(i\pi) = -i$.

12. Je dána funkce

$$u(x, y) = \alpha x^4 + 6x^2y^2 - \beta y^4 - 3y.$$

(a) Nalezněte hodnoty parametrů $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tak, aby u byla harmonická na $\mathbb{R}^2$.

(b) Nalezněte všechny funkce $v(x, y)$ tak, aby $u(x, y) + iv(x, y)$ byla celistvá.

13. Necht' $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ a $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je dána předpisem

$$u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

(a) Ověřte, že u je harmonická na Ω .

(b) Nalezněte holomorfní funkci $f(z)$ na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ takovou, že $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$ a $f(1) = 0$.

14. Je dána funkce

$$u(x, y) = e^y \sin(\alpha x) + 3xy + x,$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je parametr.

(a) Určete všechny hodnoty parametru α tak, aby $u(x, y)$ byla harmonická na $\mathbb{R}^2$.

(b) Pro všechny kladné hodnoty parametru α z bodu (a) nalezněte všechny funkce $v(x, y)$ tak, aby $u(x, y) + iv(x, y)$ byla celistvá.

15. Je dána funkce

$$u(x, y) = e^x \cos y + e^y \cos x + xy.$$

(a) Nalezněte $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tak, aby funkce

$$f(z) = u(x, y) + i[(1+x)\sin y + \alpha e^y \ln(1+x) + \beta y^2]$$

byla diferencovatelná na množině $M = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 0\}$.

- (b) Nalezněte všechny funkce $v(x, y)$ tak, aby $g(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ byla celistvá.

16. Je dána funkce

$$u(x, y) = x^n - y^n + e^{\alpha y} \sin(4x) - 2y.$$

- (a) Nalezněte všechny hodnoty parametrů $n \in \mathbb{N}_0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby $u(x, y)$ byla harmonická funkce na $\mathbb{R}^2$.
- (b) Pro největší hodnoty parametrů n a α z bodu (a) nalezněte všechny funkce $v(x, y)$ tak, aby $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ byla celistvá.
17. Ať $f(z) = u(x) + iv(y)$ je celistvá. Ukažte, že pak je $f(z)$ polynom stupně nejvýše jedna.

Výsledky

1. $\operatorname{Re} f = \frac{x}{x^2+y^2}$, $\operatorname{Im} f = \frac{y}{x^2+y^2}$. Bod z se zobrazí na bod $w = \frac{z}{|z|^2}$. Obraz přímky je kružnice (bez bodu 0) o poloměru $\frac{1}{4}$ a středu $\frac{i}{4}$.
2. $u(x, y) = \frac{2x^2-2y^2+3}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}$, $v(x, y) = \frac{4xy}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}$ a $i \in M$.
3. $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x^2+y^2+x-y}{(x+1)^2+y^2}$, $v(x, y) = \frac{y-x-1}{(x+1)^2+y^2}$ a $2i \notin M$.
4. Neexistuje.
6. (a) $f(z)$ je diferencovatelná v bodech $z = x+ix$, kde $x \in \mathbb{R}$ a $f'(x+ix) = 2x$;
(b) $f(z)$ je diferencovatelná v 0 a $f'(0) = 0$.
7. $\alpha = -3$, $\beta = -\frac{3}{2}$.
8. (a) $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta = 3$.
(b) $\alpha = \beta = 3$.
9. $f(z) = 2x - x^3 + 3xy^2 + i(2y - 3x^2y + y^3 + K) = 2z - z^3 + iK$, kde $K \in \mathbb{R}$.
10. $f(z) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 2xy + i(4x^3y - 4xy^3 + y^2 - x^2 + 2) = z^4 - iz^2 + 2i$.
11. (b) $v(x, y) = -\cosh x \cos y - 2$.
12. (a) $\alpha = -1$, $\beta = 1$.
(b) $v(x, y) = -4x^3y + 4xy^3 + 3x + K$, kde $K \in \mathbb{R}$.
13. (b) $f(z) = \frac{i}{z} - i$.
14. (a) $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$.
(b) Pro $\alpha = 1$ je $v(x, y) = e^y \cos x + \frac{3}{2}y^2 + y - \frac{3}{2}x^2 + K$, kde $K \in \mathbb{R}$.
15. (a) $\alpha = -1$, $\beta = \frac{1}{2}$.
(b) $v(x, y) = e^x \sin y - e^y \sin x + \frac{1}{2}(y^2 - x^2) + K$, kde $K \in \mathbb{R}$.
16. (a) $n = 0, 1, 2$ a $\alpha = \pm 4$.
(b) $v(x, y) = 2xy + e^{4y} \cos(4x) + 2x + K$, kde $K \in \mathbb{R}$.