

# Křivkový integrál

## Zadání

1. Je dána funkce  $\varphi(t) = \frac{1}{t-i}$ ,  $t \in [0, 1]$ . Vypočtěte  $\varphi'(t)$  a  $\int_0^1 \varphi(t) dt$ .
2. Nalezněte parametrizaci kladně orientované hranice trojúhelníku o vrcholech  $0$ ,  $1-i$  a  $2$ .
3. Z definice vypočtěte  $\int_C 3\operatorname{Im} z - 2\operatorname{Re} z dz$ , kde  $C$  je úsečka s počátečním bodem  $1+i$  a koncovým bodem  $i$ .
4. Z definice vypočtěte  $\int_C \bar{z} dz$ , kde  $2 \in C$  a  $C$  je půlkružnice se středem v  $0$ , poloměrem  $2$ , počátečním bodem  $-2i$ , koncovým bodem  $2i$ .
5. Z definice vypočtěte  $\int_C e^{z-\bar{z}} dz$ , kde  $C$  je úsečka s počátečním bodem  $1+i\frac{\pi}{2}$  a koncovým bodem  $1$ .
6. Z definice vypočtěte  $\int_C \operatorname{Im} z dz$ , kde  $C = C_1 + C_2$ ,  $C_1$  je úsečka s počátečním bodem  $0$  a koncovým bodem  $1+i$  a  $C_2$  úsečka s počátečním bodem  $1+i$  a koncovým bodem  $2$ .
7. Z definice vypočtěte  $\int_C \bar{z} \operatorname{Re} z dz$ , kde  $C$  je kladně orientovaná hranice množiny  $M = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z \leq 0, |z| \leq 2\}$ .
8. Z definice vypočtěte  $\int_C \frac{z+1}{z} dz$ , kde  $C$  je kladně orientovaná hranice horního polomezikruží se středem v  $0$  a poloměry  $1$  a  $2$ .

9. Vypočtěte

$$\int_C \frac{\sin(z^2)}{z^{50}} + \operatorname{Re} z dz,$$

kde  $C$  je kladně orientovaná kružnice o rovnici  $|z-1| = \frac{1}{2}$ .

10. Vypočtěte

$$\int_C ze^z + \frac{3|z|}{z} - \bar{z} dz,$$

kde  $C$  je kladně orientovaná kružnice o rovnici  $|z| = 2$ .

11. Vypočtěte

$$\int_C ze^{z^2} dz,$$

kde  $C$  je křivka s parametrizací  $\varphi(t) = -\frac{i}{2} + \frac{1}{2}e^{it}$ ,  $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

12. Vypočtěte  $\int_C \frac{1}{z} dz$ , kde  $C = C_1 + C_2$ ,  $C_1$  je úsečka s počátečním bodem  $-1$  a koncovým bodem  $-2+i$  a  $C_2$  úsečka s počátečním bodem  $-2+i$  a koncovým bodem  $-\sqrt{8}-i\sqrt{8}$ .

13. Vypočtete

$$\int_C \frac{1}{z} + 2\operatorname{Im} z \, dz,$$

kde  $C$  je kladně orientovaná hranice množiny

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 1, |z - 1| \leq 3\}.$$

14. Vypočtete

$$\int_C \frac{1}{z^2 + 4} \, dz,$$

kde  $C$  je kladně orientovaná kružnice se středem  $2i$  a poloměrem 1.

15. Vypočtete  $\int_C \frac{e^z}{z} \, dz$ , kde

- (a)  $C$  je kladně orientovaná Jordanova křivka, v jejímž vnitřku leží bod 0;
- (b)  $C$  je kladně orientovaná Jordanova křivka, v jejímž vnějšku leží bod 0.

16. Vypočtete  $\int_C \frac{2z^3 + z^2 - 5}{z^2 - 1} \, dz$ , kde  $C = C_1 + C_2$ ,  $C_1$  je křivka s parametrizací  $\varphi_1(t) = t + i \sin t$ ,  $t \in [-\pi, \pi]$  a  $C_2$  je křivka s parametrizací  $\varphi_2(t) = -t + i \sin t$ ,  $t \in [-\pi, \pi]$ .

## Výsledky

1.  $\varphi'(t) = -\frac{1}{(t-i)^2}$  a  $\int_0^1 \varphi(t) \, dt = \frac{1}{2} \ln 2 + i\frac{\pi}{4}$ .

2. Například

$$\varphi(t) = \begin{cases} (1-i)t, & t \in [0, 1], \\ 1-i + (1+i)(t-1), & t \in (1, 2], \\ 2-2(t-2), & t \in (2, 3]. \end{cases}$$

3.  $-2$ .

4.  $4\pi i$ .

5.  $1$ .

6.  $1$ .

7.  $-\frac{8}{3} + 8i$ .

8.  $0$ .

9.  $\frac{i\pi}{4}$ .

10.  $4\pi i$ .

11.  $\frac{e-1}{2e}$ .

12.  $\ln 4 + i\frac{\pi}{4}$ .

13.  $-9\pi$ .

14.  $\frac{\pi}{2}$ .

15. (a)  $2\pi i$ ;

(b)  $0$ .

16.  $8\pi i$ .