

Mocninné řady

Zadání

1. Určete koeficienty u $(z-i)^0$, $(z-i)^1$, $(z-i)^3$ a $(z-i)^4$ v mocninné řadě

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{2^n} (z-i)^{2n-3}.$$

2. Nalezněte poloměr konvergence R mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{3^n} (z-i)^{2n}$.

3. Určete poloměr konvergence a v kruhu konvergence součet mocninné řady

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{n+1};$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} z^{2n};$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} (z-2i)^n;$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)z^n;$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n} z^n;$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+3}}{4^{n+1}(n+3)}.$

4. Nalezněte rozvoj funkce $f(z)$ do mocninné řady v okolí bodu z_0 a nalezněte kruh konvergence této řady, jestliže

(a) $f(z) = \sin z$ a $z_0 = 0$;

(b) $f(z) = \frac{1}{z}$ a $z_0 = 1+i$;

(c) $f(z) = \frac{1}{3z-2}$ a $z_0 = 1$;

(d) $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ a $z_0 = i$;

(e) $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$ a $z_0 = 0$;

(f) $f(z) = \frac{1}{(1-z)^3}$ a $z_0 = 0$;

(g) $f(z) = z^2$ a $z_0 = 1$;

(h) $f(z) = \frac{z^3-2z+1}{z+2}$ a $z_0 = 1$;

(i) $f(z) = \ln \frac{1+z}{1-z}$ a $z_0 = 0$;

(j) $f(z) = \frac{2-3z}{z^3-2z^2}$ a $z_0 = 1$;

(k) $f(z) = \cos^2 z$ a $z_0 = 0$;

(l) $f(z) = e^{-z} \sin z$ a $z_0 = 0$.

5. Je dána funkce

$$f(z) = \frac{3z+5}{z^2(z+1)}.$$

- (a) Nalezněte rozvoj funkce $f(z)$ do mocninné řady se středem v bodě -2 a určete poloměr konvergence této řady.

(b) Nalezněte rozvoj funkce

$$g(z) = f'(z) + 2 + z + z^2$$

do mocninné řady se středem v bodě -2 a určete její poloměr konvergence.

6. Pomocí mocninných řad nalezněte v okolí bodu 0 řešení rovnice

$$(z - 1)f'(z) + f(z) = 0$$

splňující počáteční podmínku $f(0) = 1$.

7. Pomocí mocninných řad nalezněte v okolí bodu 0 řešení rovnice

$$(z^2 + 1)f''(z) - 4zf'(z) + 6f(z) = 0$$

splňující počáteční podmínky $f(0) = 1$ a $f'(0) = -1$.

8. Určete násobnosti všech kořenů funkce f , jestliže

(a) $f(z) = z^6 + z^4 - 2z^2$;

(b) $f(z) = \left(z - \frac{2}{\pi}\right)^2 \cos\left(\frac{1}{z}\right)$;

(c) $f(z) = 1 - e^{z^2}$.

Výsledky

1. Ať a_n je koeficient u $(z - i)^n$. Pak $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{4}$ a $a_4 = 0$.
2. $R = \sqrt{3}$.
3. (a) $R = \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} z^n = ze^{-z}$;
 (b) $R = \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} z^{2n} = (1 + 2z^2)e^{z^2}$;
 (c) $R = 3$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} (z - 2i)^n = -\ln(3 + 2i - z) + \ln 3$;
 (d) $R = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)z^n = \frac{2z}{(1-z)^3}$;
 (e) $R = 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n} z^n = \ln(2 + z) - \ln 2$;
 (f) $R = 4$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+3}}{4^n(n+3)} = -\frac{z^2}{2} - 4z - 16\ln(4 - z) + 16\ln 4$.
4. (a) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ pro $z \in \mathbb{C}$;
 (b) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}} (z - 1 - i)^n$ pro $|z - 1 - i| < \sqrt{2}$;
 (c) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 3^n (z - 1)^n$ pro $|z - 1| < \frac{1}{3}$;
 (d) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[i^{n-1} + \frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}} \right] (z - i)^n$ pro $|z - i| < 1$;
 (e) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$ pro $|z| < 1$;
 (f) $f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} z^{n-2}$ pro $|z| < 1$;
 (g) $f(z) = 1 + 2(z - 1) + (z - 1)^2$ pro $z \in \mathbb{C}$;
 (h) $f(z) = (z - 1)^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} (z - 1)^n$ pro $|z - 1| < 3$;
 (i) $f(z) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} z^{2n+1}$ pro $|z| < 1$;
 (j) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [1 - (-1)^n n] (z - 1)^n$ pro $|z - 1| < 1$;
 (k) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!} z^{2n}$ pro $z \in \mathbb{C}$;
 (l) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{Im}((1-i)^n)}{n!} z^n$ pro $z \in \mathbb{C}$.
5. (a) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{5n+9}{2^{n+2}} - 2 \right] (z + 2)^n$ pro $|z + 2| < 1$ (poloměr konvergence je tedy $R = 1$);
 (b) $g(z) = (z + 2)^2 - 3(z + 2) + 4 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{5n+14}{2^{n+3}} - 2 \right] (n + 1)(z + 2)^n$ pro $|z + 2| < 1$ (poloměr konvergence je tedy $R = 1$).
6. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ pro $|z| < 1$.
7. $f(z) = 1 - z - 3z^2 + \frac{1}{3}z^3$ pro $z \in \mathbb{C}$.
8. (a) 0 je kořen násobnosti 2 a body $\pm 1, \pm\sqrt{2}i$ jsou kořeny násobnosti 1;
 (b) body $\frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}$, kde $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, jsou kořeny násobnosti 1 a bod $\frac{2}{\pi}$ je kořen násobnosti 3;
 (c) 0 je kořen násobnosti 2 a body $\pm(1 + i)\sqrt{k\pi}, \pm(1 - i)\sqrt{k\pi}$, kde $k \in \mathbb{N}$, jsou kořeny násobnosti 1.