

Laurentovy řady, izolované singularity a rezidua

Zadání

1. Určete koeficienty u mocnin $(z-i)^{-10}$, $(z-i)^{-1}$, $(z-i)^1$ a $(z-i)^2$ v Laurentově řadě

$$\sum_{n=-4}^{\infty} \frac{n+2}{2^n} (z-i)^{3n+8}.$$

2. Nalezněte rozvoj funkce

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$$

do Laurentovy řady na co největším mezikruží se středem v bodě 1 a vnitřním poloměrem $r = 0$ a toto mezikruží určete.

3. Nalezněte rozvoj funkce

$$f(z) = \frac{e^{3z-1}}{z^2}$$

do Laurentovy řady na co největším mezikruží se středem v 0 a vnějším poloměrem $R = +\infty$ a toto mezikruží určete.

4. Rozložte funkci $f(z) = \frac{1}{z^3-z^2}$ do Laurentovy řady

(a) na prstencovém okolí bodu $z_0 = 1$;

(b) na okolí bodu $z_0 = \infty$.

5. Rozložte funkci $f(z) = \frac{z+i}{z^2+4}$ do Laurentovy řady

(a) na prstencovém okolí bodu $z_0 = 2i$;

(b) na okolí bodu $z_0 = \infty$;

(c) na mezikruží se středem v bodě i , které obsahuje bod $-i$.

6. Rozložte funkci $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$ do Laurentovy řady na mezikruží daném nerovnostmi $1 < |z| < 3$.

7. Určete typ izolované singularity funkce $f(z)$ v bodě z_0 , jestliže

(a) $f(z) = \sum_{n=-5}^{+\infty} \frac{n^2+5n}{2^n} (z-3i)^{2n}$ na $P(3i)$ a $z_0 = 3i$;

(b) $f(z) = \sum_{n=-\infty}^3 \frac{(-1)^n}{|n|!} z^{n+1}$ na $P(0)$ a $z_0 = 0$.

8. Vyšetřete všechny izolované singularity funkce $f(z)$, jestliže

(a) $f(z) = \frac{z+i}{z^4+2z^2+1}$;

(b) $f(z) = \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{z}}$;

(c) $f(z) = \frac{1}{z^5(2-\cos z)(z-3)}$.

9. Nalezněte funkci f tak, aby

- (a) bod i byl kořen násobnosti 2 funkce f a bod $1 - 2i$ byl pól řádu 4 funkce f ;
- (b) bod 0 byl odstranitelnou singularitou, bod 1 byl pól řádu 3 a bod -1 byl podstatnou singularitou funkce f .
10. Určete reziduum funkce $f(z)$ v bodě z_0 , jestliže
- (a) $f(z) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^2}{3^{n-2}} (z+1)^{n-7}$ na $P(-1)$ a $z_0 = -1$;
- (b) $f(z) = \sum_{n=-3}^{+\infty} \frac{(-6)^n}{|n|!} (z-i)^{2n-4}$ na $P(i)$ a $z_0 = i$;
- (c) $f(z) = \sum_{n=-10}^{+\infty} \frac{n+2}{2^n} z^{n^2-n-3}$ na $P(0)$ a $z_0 = 0$.
11. Určete reziduum funkce $f(z) = \frac{\cos(3z^2)}{z^5}$ v bodě $z_0 = 0$.
12. Vyšetřete všechny izolované singularity (v $\mathbb{C}$) funkce $f(z)$ a spočítejte v nich reziduum, jestliže
- (a) $f(z) = \frac{\cos z}{z^2(z-\pi)}$;
- (b) $f(z) = \frac{z+1}{z^4+z^3-2z^2}$;
- (c) $f(z) = \frac{z+1}{1-e^{2\pi iz}}$;
- (d) $f(z) = \frac{1}{z \sin z}$;
- (e) $f(z) = \frac{\sin^2 z}{z(2\pi-z)^3}$;
- (f) $f(z) = \frac{1}{\sin z + \cos z}$.
13. Nalezněte hlavní část Laurentovy řady funkce $f(z) = \frac{z-\sin z}{z^5}$ na prstencovém okolí bodu 0 a určete $\text{res}_0 f(z)$.
14. Nalezněte hlavní část Laurentovy řady funkce $f(z) = \frac{z+1}{e^{-z}-1+z}$ na prstencovém okolí bodu 0 a určete $\text{res}_0(4z-3)f(z)$.
15. Je dána funkce
- $$f(z) = \frac{1}{z^8 - 4z^6}.$$
- (a) Nalezněte Laurentovu řadu funkce $f(z)$ v maximálním prstencovém okolí bodu $z_0 = 0$ a toto okolí určete.
- (b) Vyšetřete všechny izolované singularity (v $\mathbb{C}$) funkce $f(z)$.
- (c) Vypočítejte rezidua ve všech izolovaných singularitách.
- (d) Určete $k \in \mathbb{N}$ tak, aby $\text{res } z^k f(z) = -\frac{1}{4}$.
16. Je dána funkce
- $$f(z) = \frac{z+1}{z(1-z)^2}.$$
- (a) Nalezněte Laurentovu řadu funkce $f(z)$ v maximálním prstencovém okolí bodu $z_0 = 0$ a toto okolí určete.

(b) Klasifikujte všechny izolované singularity (v $\mathbb{C}$) funkcí

$$g(z) = \frac{1}{z^{20}}f(z) \quad \text{a} \quad h(z) = \frac{1}{z^{20}} + f(z).$$

Dále nalezněte reziduum funkcí $g(z)$ a $h(z)$ v bodě $z_0 = 0$.

Výsledky

1. Ať a_n je koeficient u $(z - i)^n$. Pak $a_{-10} = 0$, $a_{-1} = -8$, $a_1 = 0$ a $a_2 = 0$.
2. $\sum_{n=-3}^{+\infty} \frac{2^{n+3}e^2}{(n+3)!} (z - 1)^n$ pro $0 < |z - 1|$.
3. $\sum_{n=-2}^{+\infty} \frac{3^{n+2}e^{-1}}{(n+2)!} z^n$ pro $0 < |z|$.
4. (a) $f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n+1}(n+2)(z-1)^n$ pro $0 < |z-1| < 1$.
(b) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-3}$ pro $|z| > 1$.
5. (a) $f(z) = \frac{3}{4} \frac{1}{z+2i} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+2}i^{n+1}} (z-2i)^n$ pro $0 < |z-2i| < 4$;
(b) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-2}i^n[(-1)^{n+3}]}{z^{n+1}}$ pro $|z| > 2$;
(c) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}4i^{n+1}} (z-i)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3i^n}{4(z-i)^{n+1}}$ pro $1 < |z-i| < 3$.
6. $f(z) = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{z^{n+1}} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}$ pro $1 < |z| < 3$.
7. (a) Pól řádu -8 ;
(b) Podstatná singularita.
8. (a) $-i$ je jednoduchý pól, i je dvojnásobný pól;
(b) $z_k = \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, jsou póly řádu 2;
(c) 0 pětinasobný pól, 3 jednoduchý pól a $2k\pi \pm i \ln(2 + \sqrt{3})$, kde $k \in \mathbb{Z}$, jsou jednoduché póly.
9. (a) Například $f(z) = \frac{(z-i)^2}{(z-1+2i)^4}$;
(b) například $f(z) = \frac{\sin z}{z} + \frac{1}{(z-1)^3} + e^{\frac{1}{z+1}}$;
10. (a) $\text{res}_{-1} f(z) = \frac{4}{9}$;
(b) $\text{res}_i f(z) = 0$;
(c) $\text{res}_0 f(z) = 3$.
11. $\text{res}_0 f(z) = \frac{9}{2}$.
12. (a) 0 je pól řádu 2, π je pól řádu 1, $\text{res}_0 f(z) = \text{res}_{\pi} f(z) = -\frac{1}{\pi^2}$;
(b) 0 je pól řádu 2, -2 a 1 jsou póly řádu 1, $\text{res}_0 f(z) = -\frac{3}{4}$, $\text{res}_{-2} f(z) = \frac{1}{12}$ a $\text{res}_1 f(z) = \frac{2}{3}$;
(c) $z = -1$ je odstranitelná singularita, $z = k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ je pól řádu 1, $\text{res}_{-1} f(z) = 0$ a $\text{res}_k f(z) = -\frac{k+1}{2\pi i}$;
(d) $z = 0$ je pól řádu 2, $z = k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, je pól řádu 1, $\text{res}_0 f(z) = 0$ a $\text{res}_{k\pi} f(z) = \frac{(-1)^k}{k\pi}$;
(e) 0 je odstranitelná singularita, 2π je pól řádu 1, $\text{res}_0 f(z) = 0$ a $\text{res}_{2\pi} f(z) = \frac{1}{2\pi}$;
(f) $z_k = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, jsou jednoduché póly, $\text{res}_{z_k} = \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}}$.

13. Hlavní část je $\frac{1}{3!} \frac{1}{z^2}$; $\text{res}_0 f(z) = 0$.
14. Hlavní část je $\frac{1}{z^2} + \frac{7}{3z}$; $\text{res}_0(4z - 3)f(z) = -3$.
15. (a) $f(z) = \sum_{n=-3}^{\infty} -\frac{z^{2n}}{4^{n+4}}$ pro $0 < |z| < 2$.
 (b) 0 je pól řádu 6 a ± 2 jsou póly řádu 1.
 (c) $\text{res}_{-2} f(z) = -\frac{1}{2^8}$, $\text{res}_0 f(z) = 0$, $\text{res}_2 f(z) = \frac{1}{2^8}$.
 (d) $k = 5$.
16. (a) $\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 3)z^n$ pro $0 < |z| < 1$.
 (b) Funkce g má v 0 pól řádu 21 a v 1 pól řádu 2, funkce h má v 0 pól řádu 20 a v 1 pól řádu 2, $\text{res}_0 g(z) = 41$ a $\text{res}_0 h(z) = 1$.