

Reziduová věta a její aplikace

Zadání

1. Vypočtěte

(a)

$$\int_C \frac{z^2 + 1}{(z - 1)^2(z + 2)} dz,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z| = 3$;

(b)

$$\int_C \frac{2z - 1}{z^2(z^3 + 1)} dz,$$

kde C je kladně orientovaná hranice obdélníka s vrcholy $-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$, $2 - \frac{i}{2}$, $-\frac{1}{2} + i$ a $2 + i$;

(c)

$$\int_C e^{\frac{4}{z-2}} dz,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z - 1| = 3$.

2. Je dána funkce

$$f(z) = \frac{1}{z \sin z}.$$

(a) Určete hlavní část Laurentova rozvoje funkce f na prstencovém okolí body 0.

(b) Vypočtěte

$$\int_C f(z) dz,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z| = 1$.

3. V závislosti na parametru $n \in \mathbb{Z}$ vypočtěte

$$\int_C \frac{e^z(z + 1)}{z^n} dz,$$

kde C je kladně orientovaná Jordanova křivka mající ve svém vnitřku bod 0.

4. Vypočtěte

(a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 6x + 25} dx;$$

(b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx;$$

(c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^3} dx;$$

(d)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x + 3)} dx.$$

5. Vypočtěte

(a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2ix}}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx;$$

(b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 - 2x + 2)^2} dx;$$

(c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2x^2 + 7) \cos x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx;$$

(d)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x^4 + 4} dx;$$

(e)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4 - 1} dx;$$

(f)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x)}{x(x + 1)} dx;$$

(g)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{(x - 1)(x^2 + 1)} dx.$$

Výsledky

1. (a) $2\pi i$;
(b) $\pi \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 3i \right)$;
(c) $8\pi i$.
2. (a) $\frac{1}{z^2}$.
(b) 0.

3.

$$\int_C \frac{e^z(z+1)}{z^n} dz = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \leq 0, \\ 2\pi i & \text{pro } n = 1, \\ 2\pi i \frac{n}{(n-1)!} & \text{pro } n \geq 2. \end{cases}$$

4. (a) $\frac{\pi}{4}$;
(b) $\sqrt{2}\pi$;
(c) $\frac{3\pi}{8}$;
(d) $\frac{3\pi}{10}$.
5. (a) $-\frac{\pi}{8e^2} \left(\frac{1}{3e^4} - 1 \right)$;
(b) $\frac{\pi}{2} e^{-1} (2 \sin 1 + \cos 1)$;
(c) $\frac{\pi}{3} \left(\frac{5}{e} + \frac{1}{2e^2} \right)$;
(d) $-\frac{\pi}{4e^\pi}$;
(e) $\frac{\pi}{2} \left(\cos 1 - \frac{1}{e} \right)$;
(f) $-\pi \sin 2$;
(g) $\frac{i\pi}{2} (e^{2i} + e^{-2}(-1+i))$.