

# $Z$ -transformace

## Zadání

1. Je dána posloupnost

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots).$$

- (a) Nalezněte  $Z$ -transformaci posloupnosti  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ .
  - (b) Nalezněte  $Z$ -transformaci posloupnosti  $(2^n a_n - n a_n)_{n=0}^{\infty}$ .
  - (c) Nalezněte posloupnost  $(a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty}$ , kde  $b_0 = 1$  a  $b_n = 0$  pro  $n \geq 1$ .
  - (d) Nalezněte posloupnost  $(a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty}$ , kde  $b_1 = 1$  a  $b_n = 0$  pro  $n \neq 1$ .
  - (e) Nalezněte  $Z$ -transformaci posloupnosti  $(a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty}$  z předchozího bodu.
2. Nalezněte  $Z$ -transformaci posloupnosti  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ , jestliže
- (a)  $a_n = \sin(\omega(n+2))$  pro všechna  $n \in \mathbb{N}_0$ , kde  $\omega \in \mathbb{C}$ ;
  - (b)  $a_n = \sum_{k=0}^n 2^k(n-k+1)$  pro všechna  $n \in \mathbb{N}_0$ .
3. Je dána posloupnost  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ , kde

$$a_n = \frac{n - 3^n}{n!}.$$

- (a) Nalezněte  $Z$ -transformaci posloupnosti  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ .
- (b) Nalezněte  $Z$ -transformaci posloupnosti  $(a_{n+2})_{n=0}^{\infty}$ .

4. Nalezněte inverzní  $Z$ -transformaci funkce

- (a)  $F(z) = \frac{e^{\frac{5}{z}} - 1}{z^3}$ ;
- (b)  $F(z) = \ln\left(\frac{z-1}{z}\right)$ ;
- (c)  $F(z) = \frac{1}{z^{100}+1}$ ;
- (d)  $F(z) = \frac{z}{z^2-6z+8}$ .

5. Je dána funkce

$$F(z) = \ln\left(1 + \frac{4}{z^2}\right) - \frac{1}{3z-2}.$$

- (a) Nalezněte rozvoj  $F(z)$  do Laurentovy řady na okolí nekonečna.
  - (b) Určete členy  $a_0, a_1, a_2$  posloupnosti  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ , která je inverzní  $Z$ -transformací funkce  $F(z)$ .
  - (c) Určete členy  $c_0, c_1, c_2$  posloupnosti  $(c_n)_{n=0}^{\infty} = (a_n)_{n=0}^{\infty} * (1)_{n=0}^{\infty}$ , kde  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  je posloupnost z bodu (b).
6. Pomocí  $Z$ -transformace nalezněte řešení diferenční rovnice

$$y_{n+2} + 3y_{n+1} + 2y_n = (-2)^n,$$

s počátečními podmínkami  $y_0 = 0, y_1 = 0$ .

7. Nalezněte řešení diferenční rovnice

$$y_{n+2} - y_{n+1} + \frac{1}{2}y_n = 1$$

vyhovující počátečním podmínkám  $y_0 = 2$  a  $y_1 = 3$ .

8. Je dána posloupnost  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ , kde  $a_0 = 1$  a  $a_n = 0$  pro všechna  $n \geq 1$ . Nalezněte řešení diferenční rovnice

$$y_{n+3} + y_n = a_n$$

vyhovující počátečním podmínkám  $y_0 = y_1 = 0$  a  $y_2 = -1$ .

9. Nalezněte řešení soustavy diferenčních rovnic

$$x_{n+1} = 2x_n - y_n$$

$$y_{n+1} = x_n + 1$$

vyhovující počátečním podmínkám  $x_0 = y_0 = 1$ .

10. Pomocí  $Z$ -transformace řešte diferenční rovnici

$$y_{n+1} + 4y_n = \sum_{k=0}^n 2^k 3^{n-k}$$

s počáteční podmínkou  $y_0 = 4$ .

11. Pomocí  $Z$ -transformace řešte diferenční rovnici

$$y_{n+2} + \sum_{k=0}^n 2^k y_{n-k} = n$$

s počátečními podmínkami  $y_0 = y_1 = 0$ .

12. V závislosti na  $n \in \mathbb{N}$  nalezněte pomocí  $Z$ -transformace součet konečné řady

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^n.$$

## Výsledky

1. (a)  $\frac{z^2}{z^2-1}$ .  
 (b)  $\frac{z^2}{z^2-4} - \frac{2z^2}{(z^2-1)^2}$ .  
 (c)  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ .  
 (d)  $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ , kde  $c_0 = 0$  a  $c_n = a_{n-1}$  pro  $n \geq 1$ .  
 (e)  $\frac{z}{z^2-1}$ .
2. (a)  $\frac{z^3 \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1} - z \sin \omega$ ;  
 (b)  $\frac{z^3}{(z-1)^2(z-2)}$ .
3. (a)  $\mathcal{Z}[a_n](z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z} - e^{\frac{3}{z}}$ .  
 (b)  $\mathcal{Z}[a_{n+2}](z) = ze^{\frac{1}{z}} - z^2 e^{\frac{3}{z}} + z^2 + 2z$ .
4. (a)  $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$  a  $a_n = \frac{5^{n-3}}{(n-3)!}$  pro  $n \geq 4$ ;  
 (b)  $a_0 = 0$  a  $a_n = -\frac{1}{n}$  pro  $n \geq 1$ ;  
 (c)  $a_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{100}-1}, & \text{jestliže } n = 100(k+1) \text{ pro nějaké } k \in \mathbb{N}_0, \\ 0, & \text{jinak;} \end{cases}$   
 (d)  $a_n = \frac{1}{2}(4^n - 2^n)$  pro  $n \in \mathbb{N}_0$ .
5. (a)  $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 4^n}{nz^{2n}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1} z^{n+1}}$ .  
 (b)  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = -\frac{1}{3}$ ,  $a_2 = \frac{34}{9}$ .  
 (c)  $c_0 = 0$ ,  $c_1 = -\frac{1}{3}$ ,  $c_2 = \frac{31}{9}$ .
6.  $y_n = (-1)^n - \left(1 - \frac{n}{2}\right)(-2)^n$  pro  $n \in \mathbb{N}_0$ .
7.  $y_n = 2 + 2^{1-\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$  pro  $n \in \mathbb{N}_0$ .
8.  $y_n = \frac{2}{3}(-1)^{n-1} - \frac{1}{3}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{3}\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$  pro  $n \in \mathbb{N}_0$ .
9.  $x_n = \frac{2+n-n^2}{2}$  a  $y_n = \frac{2+3n-n^2}{2}$  pro  $n \in \mathbb{N}_0$ .
10.  $y_n = -\frac{2^n}{3} + \frac{3^{n+1}}{7} - 2\frac{(-4)^n}{21} + 4(-4)^n$  pro  $n \in \mathbb{N}_0$ .
11.  $y_n = \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(6-n)$  pro  $n \geq 1$ .
12.  $2 + 2^{n+1}(n-1)$ .