

9. PŘEDNÁŠKA – Nelineární syntéza

- **Tvarovací (waveshaping) syntéza**
 - Nelineární funkce
 - Čebyševovy polynomy
 - Hudební nástroje
- **Granulační syntéza**
 - Časová oblast
 - Frekvenční oblast
 - Techniky řetězení (konkatenace)

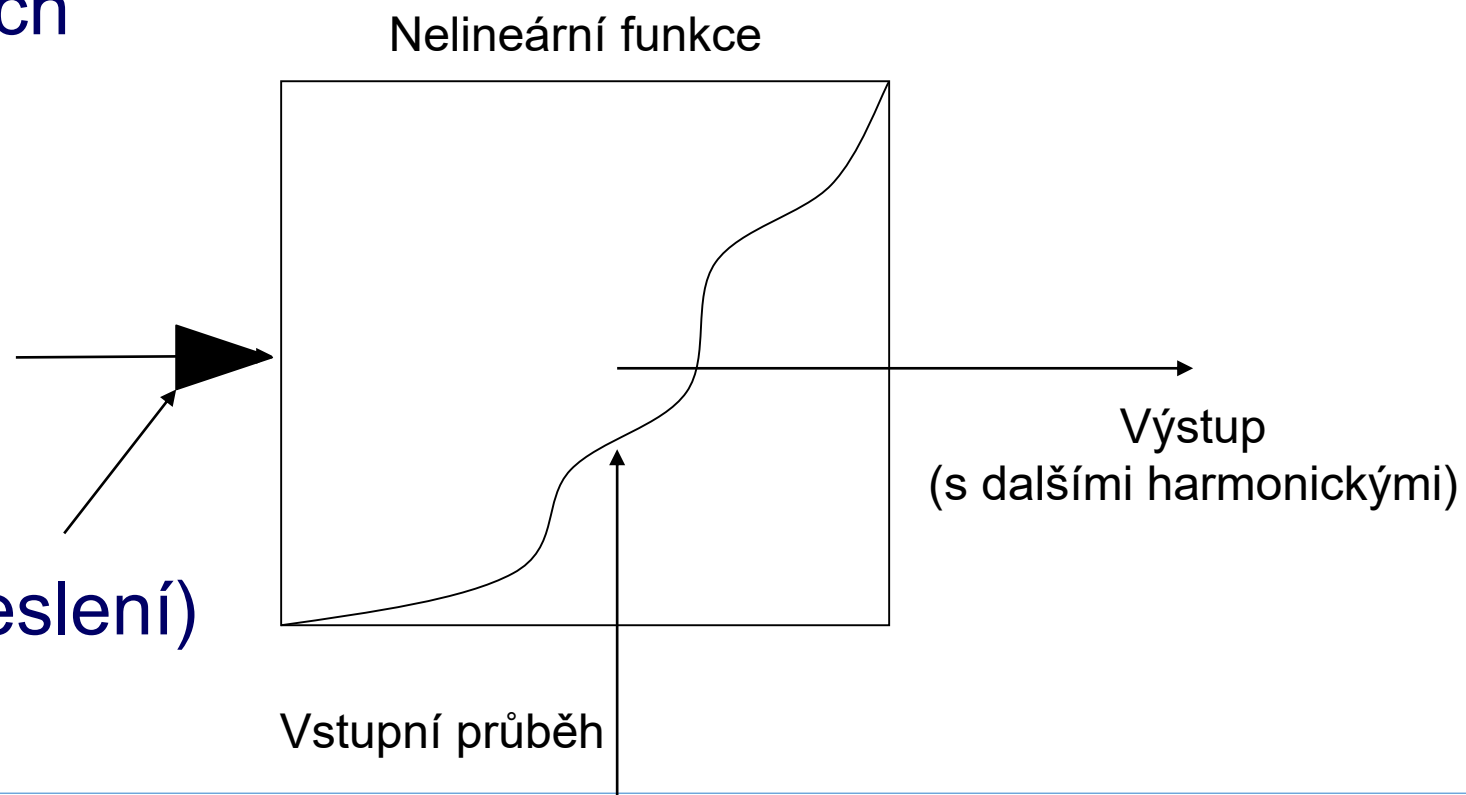
- **Definice:**

- Modifikuje (zkresluje) audio signály pomocí **nelineární funkce**.

- **Vlastnosti:**

- Umožňuje dynamické tónové změny srovnatelné s FM syntézou.
- Přesné navrhování spekter s omezeným pásmem je významnou výhodou.

- Technika vytváří dynamická spektra prostřednictvím nelineárních transformací.



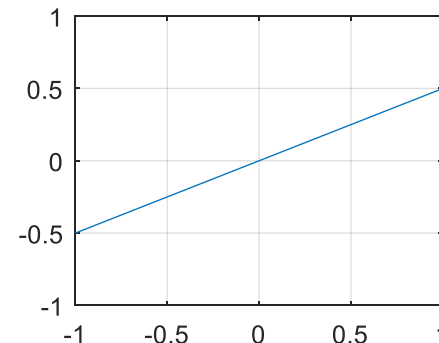
- Index tvarování (nebo zkreslení)

- **Příklady tvarování**
Mocninné funkce ($k = 1$)

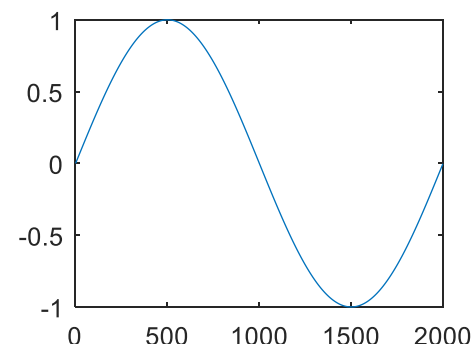
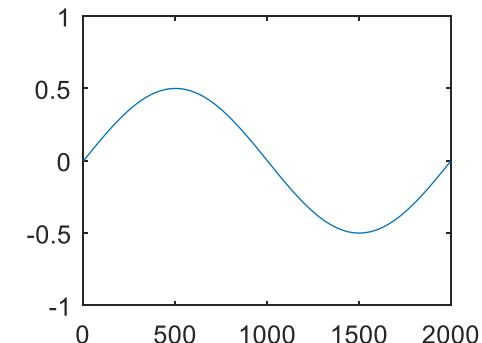
Funkce: $f(x) = 0.5 * x^1$

- Lineární funkce – snižuje amplitudu signálu na polovinu.
- Bez zkreslení a bez dodatečných harmonických složek.

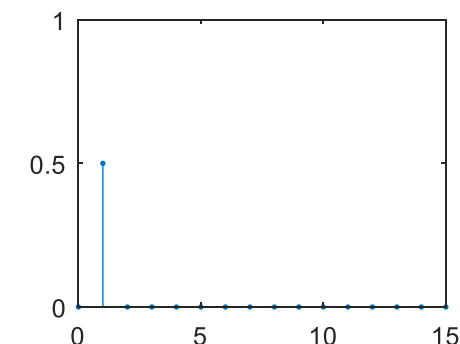
Transfer characteristic



Output waveform



Input waveform



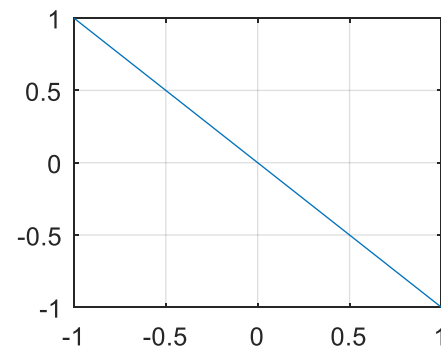
Amplitude spectrum of the output

- **Příklady tvarování**
Mocninné funkce ($k = 1$)

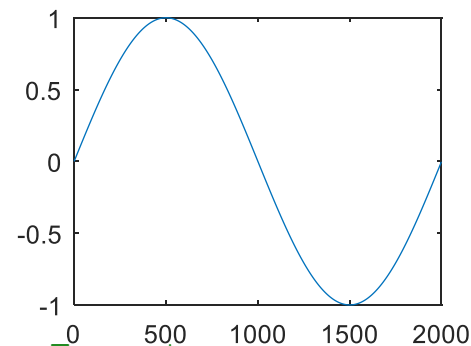
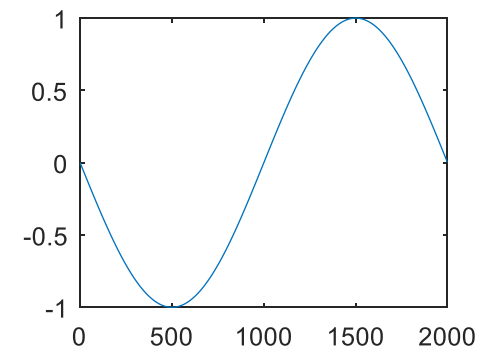
Funkce: $f(x) = -x^1$

- Invertuje vstupní signál
(lineární transformace)..

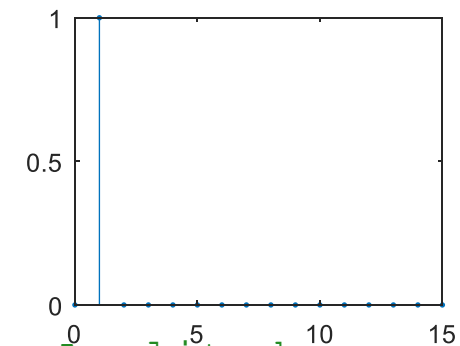
Transfer
characteristic



Output
waveform



Input
waveform



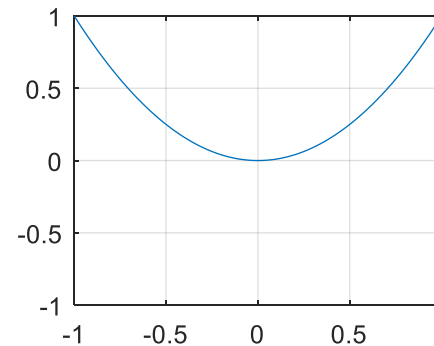
Amplitude
spectrum
of the output

• Příklady tvarování Mocninné funkce ($k = 2$)

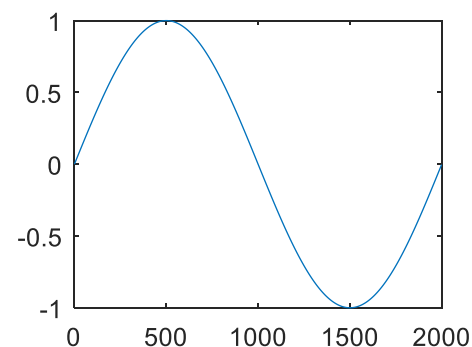
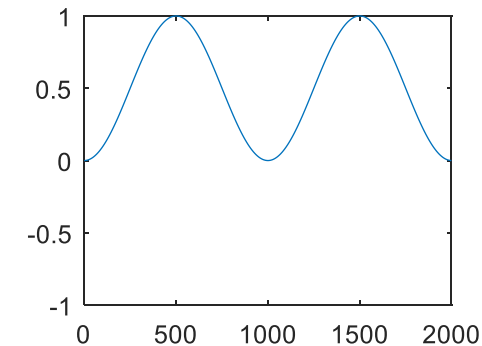
Funkce: $f(x) = x^2$

- Kvadratická, symetrická funkce.
- Generuje pouze sudé harmonické složky (až do řádu k).
- Základní frekvence je posunuta o jednu oktávu výše.

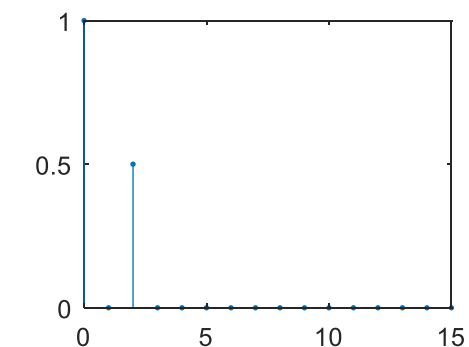
Transfer characteristic



Output waveform



Input waveform



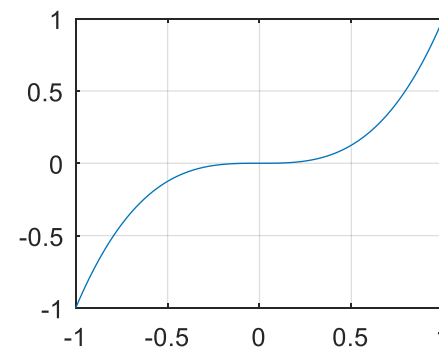
Amplitude spectrum of the output

- **Příklady tvarování**
Mocninné funkce ($k = 3$)

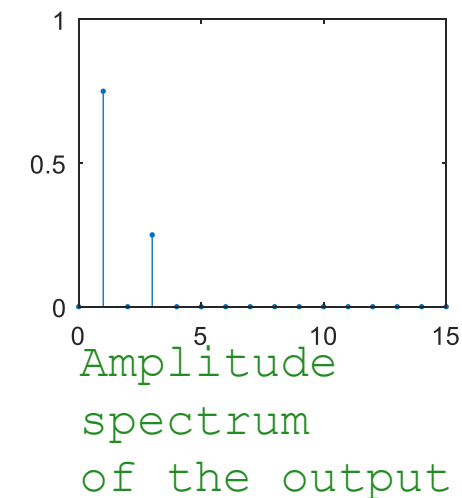
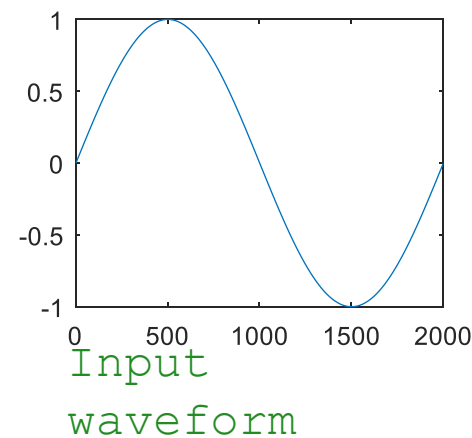
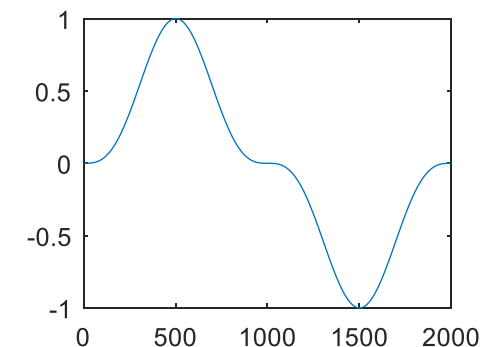
Funkce: $f(x) = x^3$

- Funkce liché symetrie.
- Generuje pouze liché harmonické složky (až do řádu k).
- Silná nelinearita pro velké amplitudy.

Transfer characteristic



Output waveform



• Příklady tvarování

Kombinované mocninné funkce

Funkce: $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x^1$

- Produkuje čtyři harmonické složky, jejichž amplitudy lze odvodit z Pascalova trojúhelníku.
- Výstup vykazuje zřetelné periodické zabarvení (**pitch periodu**).



$$a_{h0} = 0.5 + 0.375 = 0.875$$

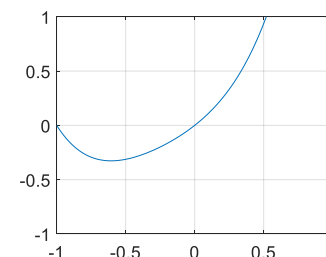
$$a_{h1} = 1 + 0.75 = 1.75$$

$$a_{h2} = 0.5 + 0.5 = 1$$

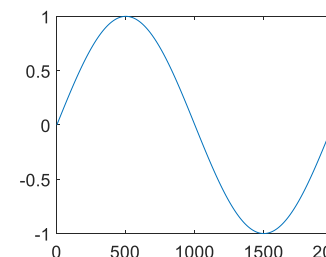
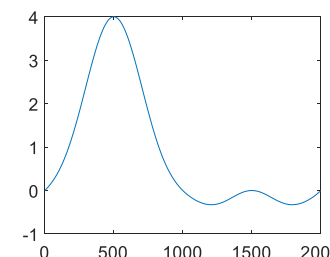
$$a_{h3} = 0.25$$

$$a_{h4} = 0.125$$

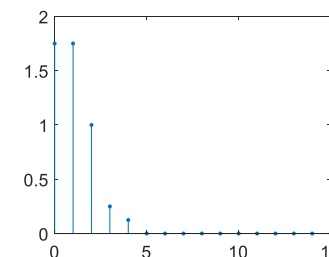
Transfer characteristic



Output waveform



Input waveform



Amplitude spectrum of the output

• Příklady tvarování

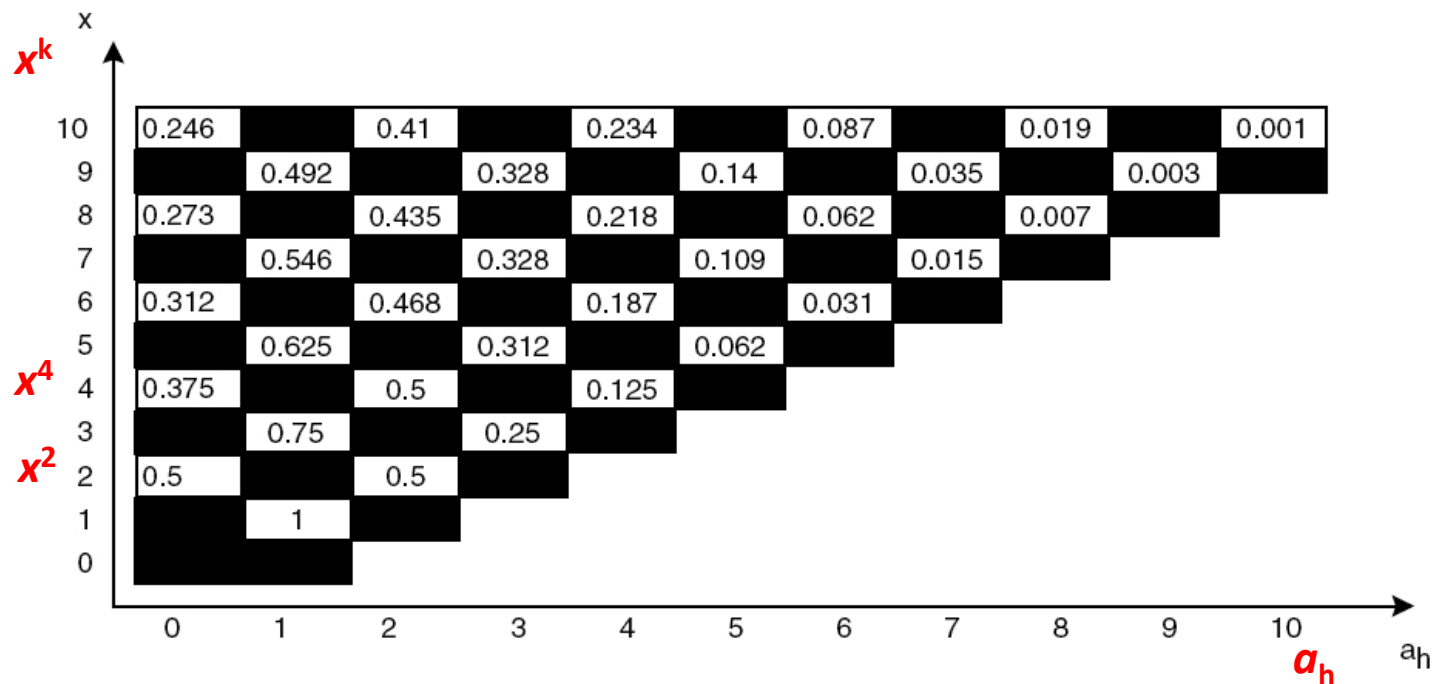
Vlastní (uživatelská) funkce

Funkce: $f(x) = -3x^4 + 2x^2$

$$a_{h0} = 2 * 0.5 - 3 * 0.375 = -0.125$$

$$a_{h2} = 2 * 0.5 - 3 * 0.5 = -0.500$$

$$a_{h4} = -3 * 0.125 = -0.375$$



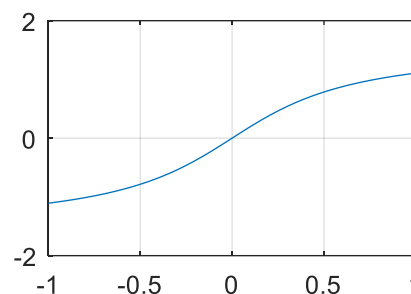
• Příklady tvarování Cyklometrické funkce

Funkce:

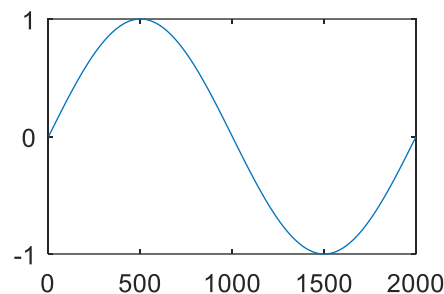
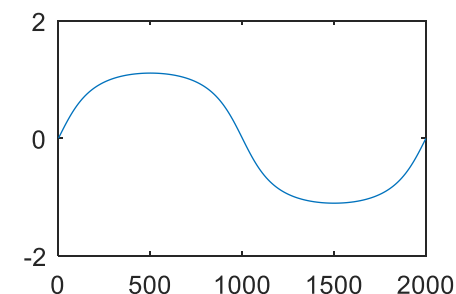
$$f(x) = \max(x) * \text{atan}(\text{index} * x/\max(x))$$

- Lichá funkce.
- Generuje pouze liché harmonické složky.
- Obsah harmonických závisí na hodnotě **indexu**.

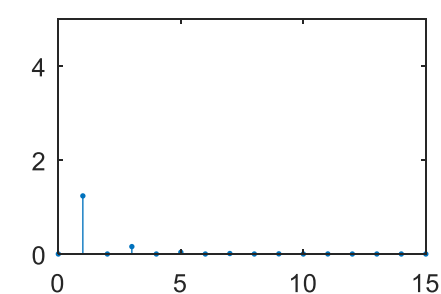
Transfer
characteristic



Output
waveform



Input
waveform



Amplitude
spectrum
of the output

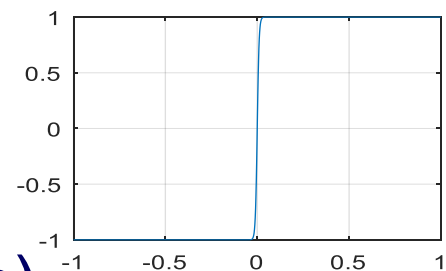
• Příklady tvarování Hyperbolické funkce

Funkce:

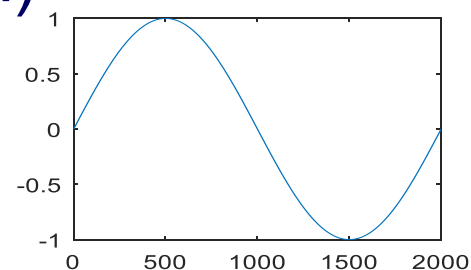
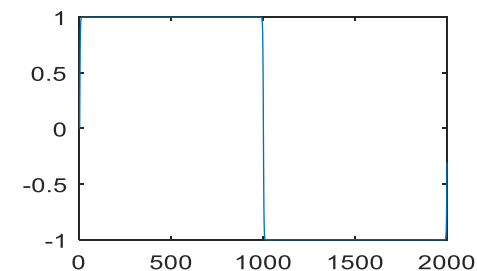
$$f(x) = \max(x) * \tanh(\text{index} * x / \max(x))$$

- Lichá funkce s **oříznutým** (klipovaným) signálem.
- Výstup je omezen na rozsah ± 1 .

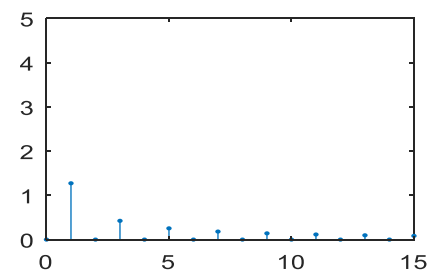
Transfer
characteristic



Output
waveform



Input
waveform



Amplitude
spectrum
of the output

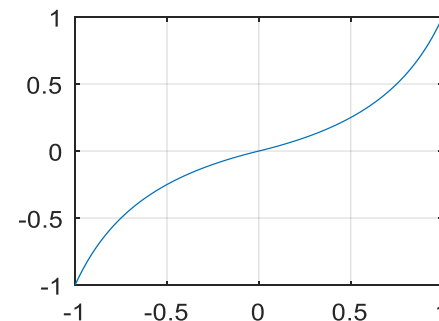
• Kytarové zkreslení I

Funkce:

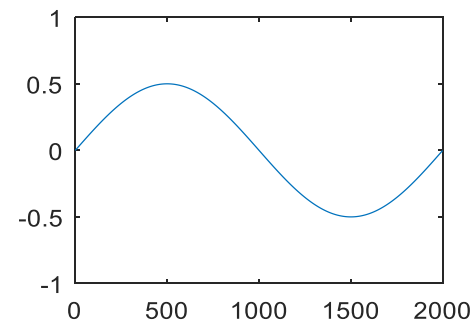
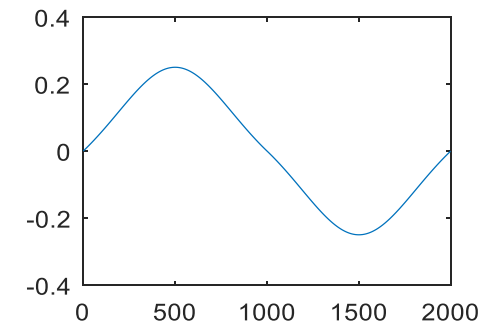
$$f(x) = x \cdot (abs(x) + index) ./ (x.^2 + (index-1) \cdot abs(x) + 1)$$

- Výstup závisí na hodnotě **indexu**.

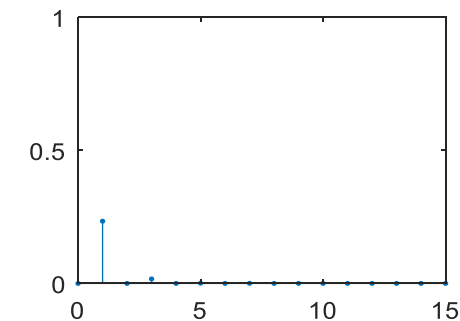
Transfer
characteristic



Output
waveform



Input
waveform



Amplitude
spectrum
of the output

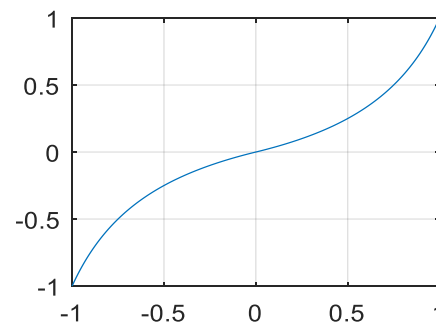
• Kytarové zkreslení II

Funkce:

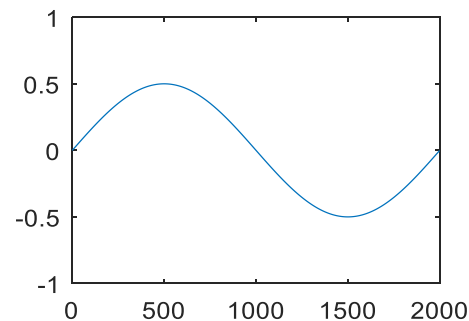
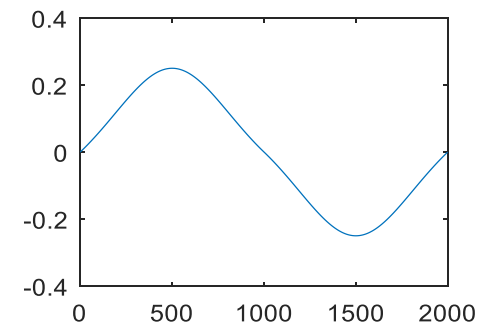
$$f(x) = x + (\text{abs}(x) > \text{index}) \cdot (\text{abs}(x) - \text{index}) \cdot \sin(\pi + 2 \cdot \pi \cdot x)$$

- Výstup závisí na hodnotě **indexu**.

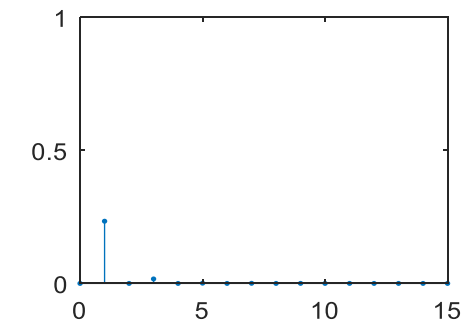
Transfer
characteristic



Output
waveform



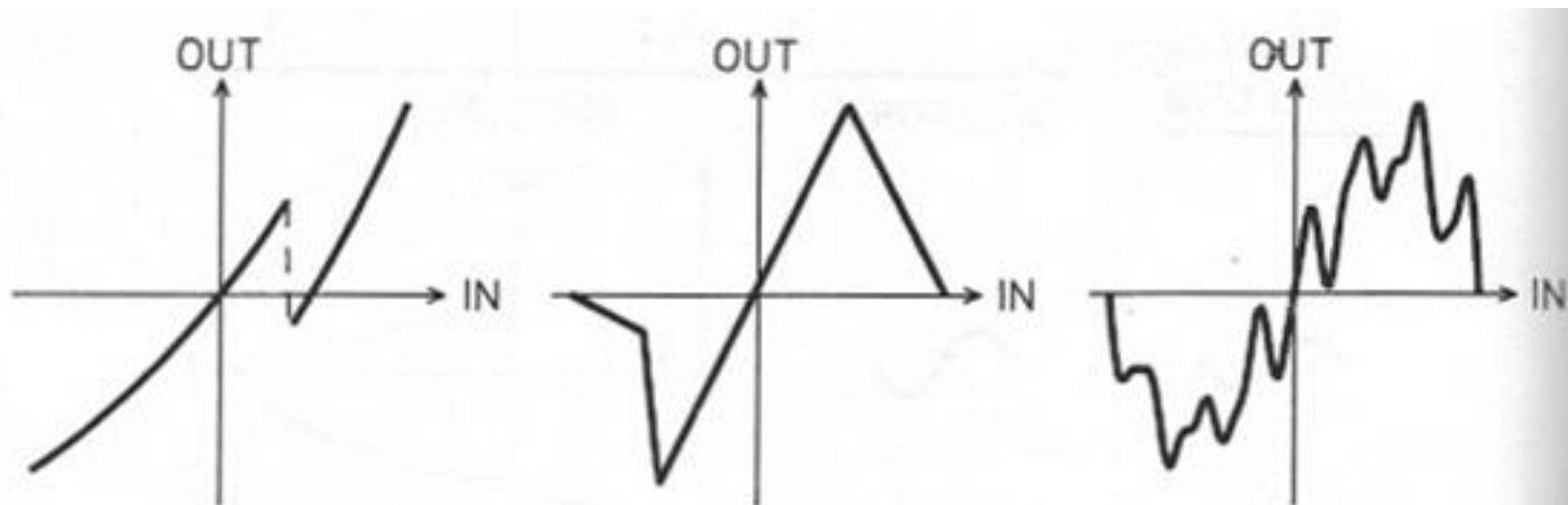
Input
waveform



Amplitude
spectrum
of the output

• Efekt aliasing

- Prudké změny (zlomy) v nelineárních funkcích mohou způsobit aliasing.
- Aliasing lze někdy využít záměrně pro specifické zvukové efekty.



- **Návrh nelineárních funkcí**
- Převodní charakteristiky lze navrhnout graficky nebo pomocí polynomů.
- Polynomy umožňují přesnou kontrolu spektra a zabraňují vzniku harmonických složek nad řád N :

$$F(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + \dots + d_Nx^N$$

Čebyševovy polynomy

- Užitečné pro návrh nelineárních funkcí.
- Umožňují generovat konkrétní harmonické složky s danými relativními amplitudami.
- Čebyševův polynom řádu k generuje pouze k -tou harmonickou složku.

-

- **Vzorec:**

$$T_k(x) = \cos(k \cdot \theta)$$

$$x = \cos(\theta)$$

• Odvození Čebyševových polynomů

$$\begin{aligned}\cos(2 \cdot \theta) &= \cos(\theta + \theta) = \cos(\theta) \cdot \cos(\theta) - \sin(\theta) \cdot \sin(\theta) \\ &= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = \cos^2(\theta) - \{1 - \cos^2(\theta)\} = 2 \cdot \cos^2(\theta) - 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(3 \cdot \theta) &= \cos(\theta + 2 \cdot \theta) \\ &= \cos(\theta) \cdot \cos(2 \cdot \theta) - \sin(\theta) \cdot \sin(2 \cdot \theta) \\ &= \cos(\theta) \cdot \{2 \cdot \cos^2(\theta) - 1\} - \sin(\theta) \cdot \{2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)\} \\ &= 2 \cdot \cos^3(\theta) - \cos(\theta) - 2 \cdot \sin^2(\theta) \cdot \cos(\theta) \\ &= 2 \cdot \cos^3(\theta) - \cos(\theta) - 2 \cdot \{1 - \cos^2(\theta)\} \cdot \cos(\theta) \\ &= 2 \cdot \cos^3(\theta) - \cos(\theta) - 2 \cdot \cos(\theta) + 2 \cdot \cos^3(\theta) \\ &= 4 \cdot \cos^3(\theta) - 3 \cdot \cos(\theta)\end{aligned}$$

$$\cos(0 \cdot \theta) = 1$$

$$\cos(1 \cdot \theta) = \cos(\theta)$$

$$\cos(2 \cdot \theta) = 2 \cdot \cos^2(\theta) - 1$$

$$\cos(3 \cdot \theta) = 4 \cdot \cos^3(\theta) - 3 \cdot \cos(\theta)$$

$$\cos(4 \cdot \theta) = 8 \cdot \cos^4(\theta) - 8 \cdot \cos^2(\theta) + 1$$

$$x = \cos(\theta)$$

$$T_k(x) = \cos(k \cdot \theta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$T_0(x) = \cos(0 \cdot \theta) = 1$$

$$T_1(x) = \cos(1 \cdot \theta) = \cos(\theta) = x$$

$$T_2(x) = \cos(2 \cdot \theta) = 2 \cdot x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4 \cdot x^3 - 3 \cdot x$$

$$T_4(x) = 8 \cdot x^4 - 8 \cdot x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 16 \cdot x^5 - 20 \cdot x^3 + 5 \cdot x$$

atd.

$$T_{k+1}(x) = 2 \cdot x \cdot T_k(x) - T_{k-1}(x)$$

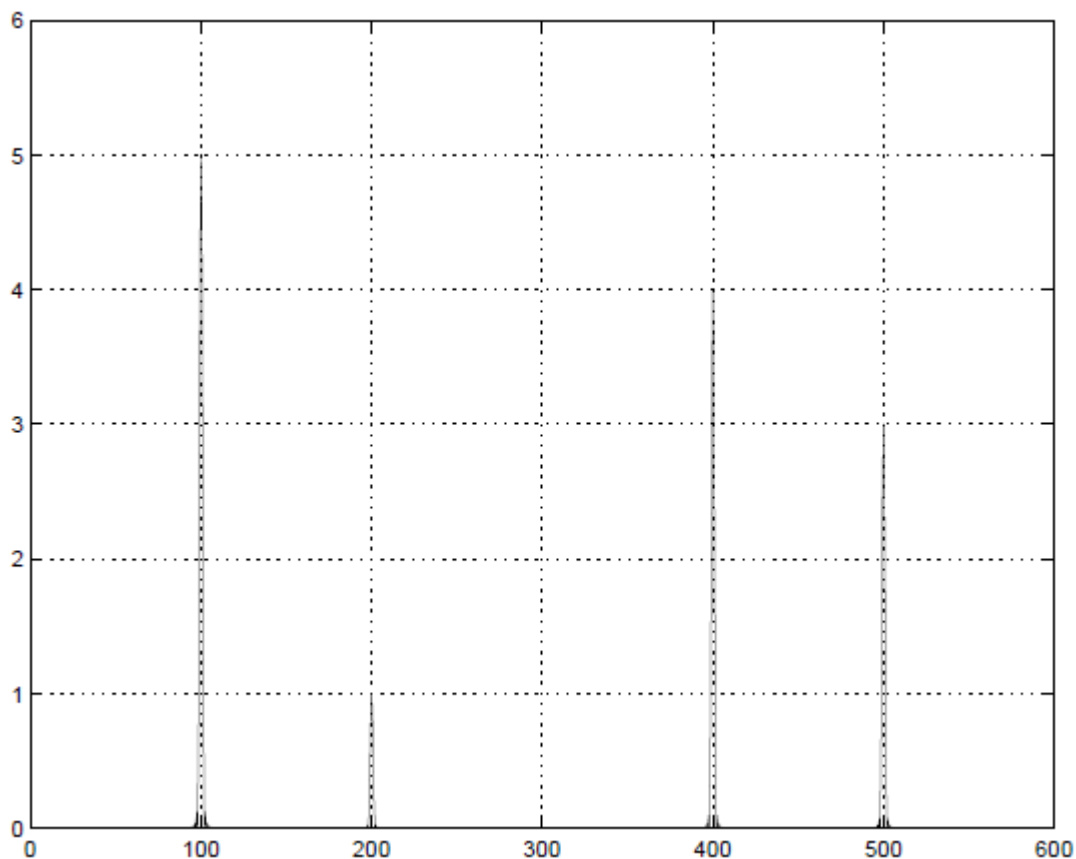
Čebyševovy polynomy

- Rekurentní vztah:

$$T_{k+1}(x) = 2x \cdot T_k(x) - T_{k-1}(x)$$

$$\begin{aligned} T_0 &= 1; \\ T_1 &= x; \\ T_2 &= 2x^2 - 1; \\ T_3 &= 4x^3 - 3x; \\ T_4 &= 8x^4 - 8x^2 + 1; \\ T_5 &= 16x^5 - 20x^3 + 5x; \\ T_6 &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1; \\ T_7 &= 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x; \\ T_8 &= 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1; \\ T_9 &= 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x; \\ T_{10} &= 512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1; \\ T_{11} &= 1024x^{11} - 2816x^9 + 2816x^7 - 1232x^5 + 220x^3 - 11x; \end{aligned}$$

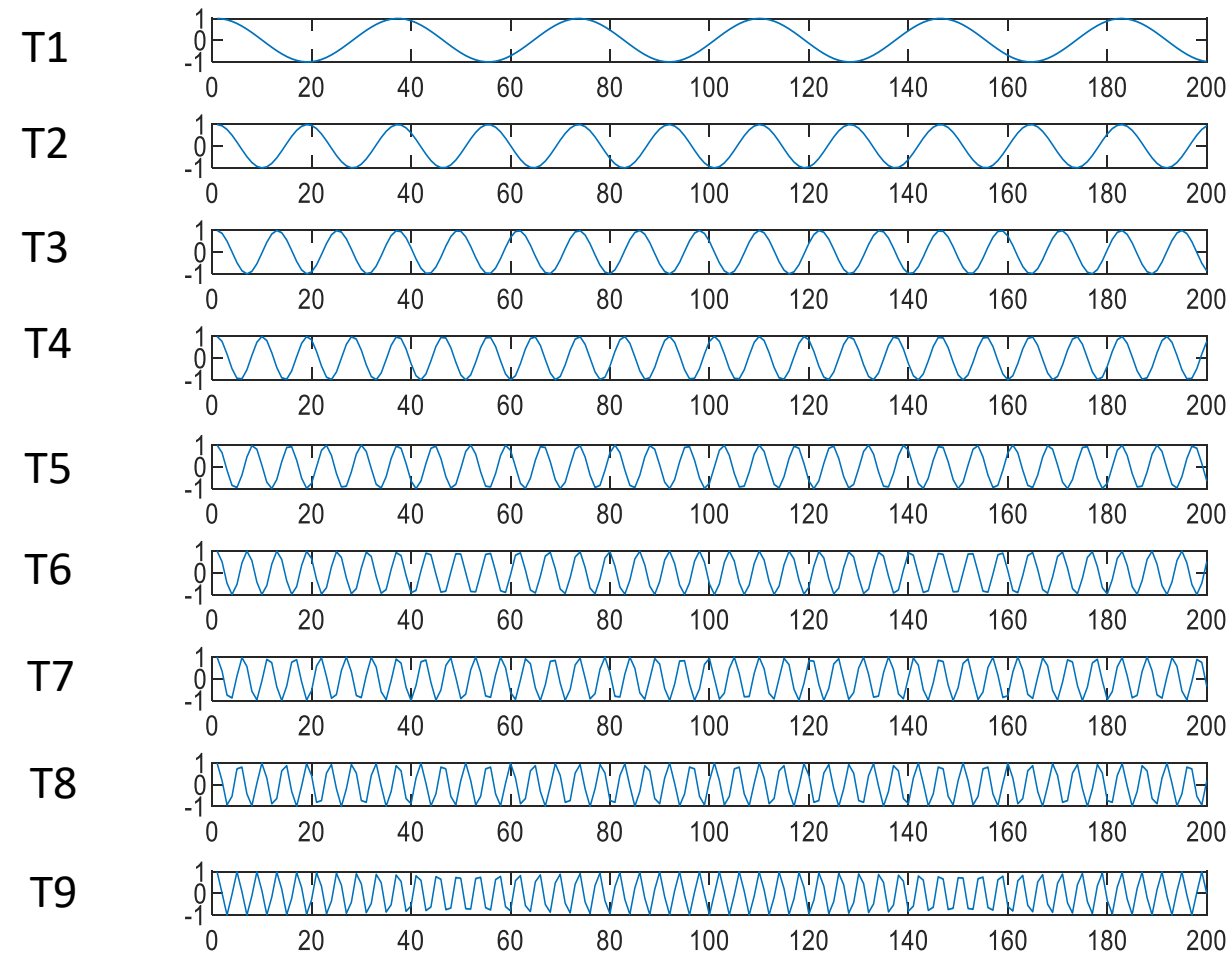
- Tvarovací syntéza s Čebyševovými polynomy



$$\begin{aligned}
 |H(x)| &= 5T_1(x) + T_2(x) + 4T_4(x) + 3T_5(x) \\
 &= 5x + (2x^2 - 1) + 4(8x^4 - 8x^2 + 1) \\
 &\quad + 3(16x^5 - 20x^3 + 5x) \\
 &= 48x^5 + 32x^4 - 60x^3 - 30x^2 + 20x + 3.
 \end{aligned}$$

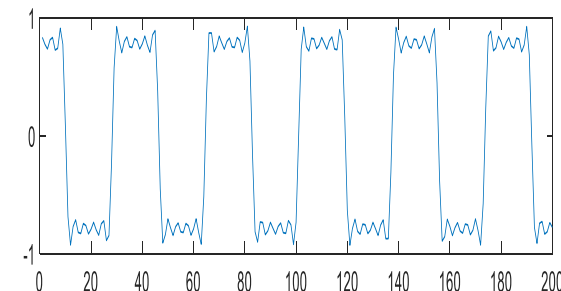
• Tvarovací syntéza s Čebyševovými polynomy

$x = \cos(2 * \pi * 440 * [0 : 1/fs : doba - 1/fs]);$



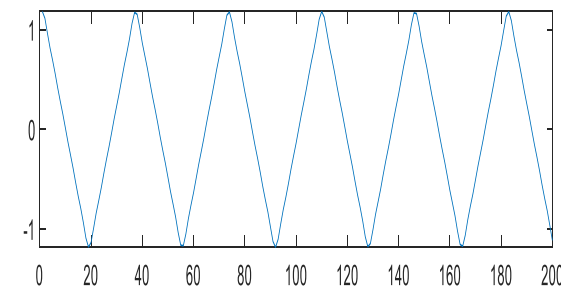
Square wave:

$$y = T1 - (1/3)*T3 + (1/5)*T5 - (1/7)*T7 + (1/9)*T9$$



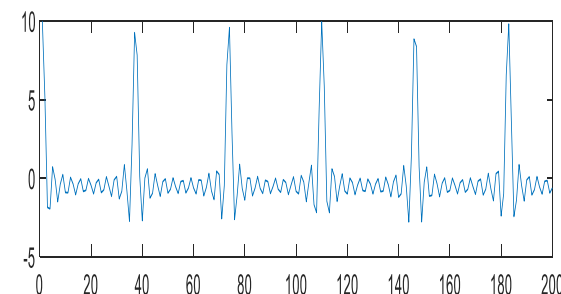
Triangle wave:

$$y = T1 + (1/9)*T3 + (1/25)*T5 + (1/49)*T7 + (1/81)*T9$$

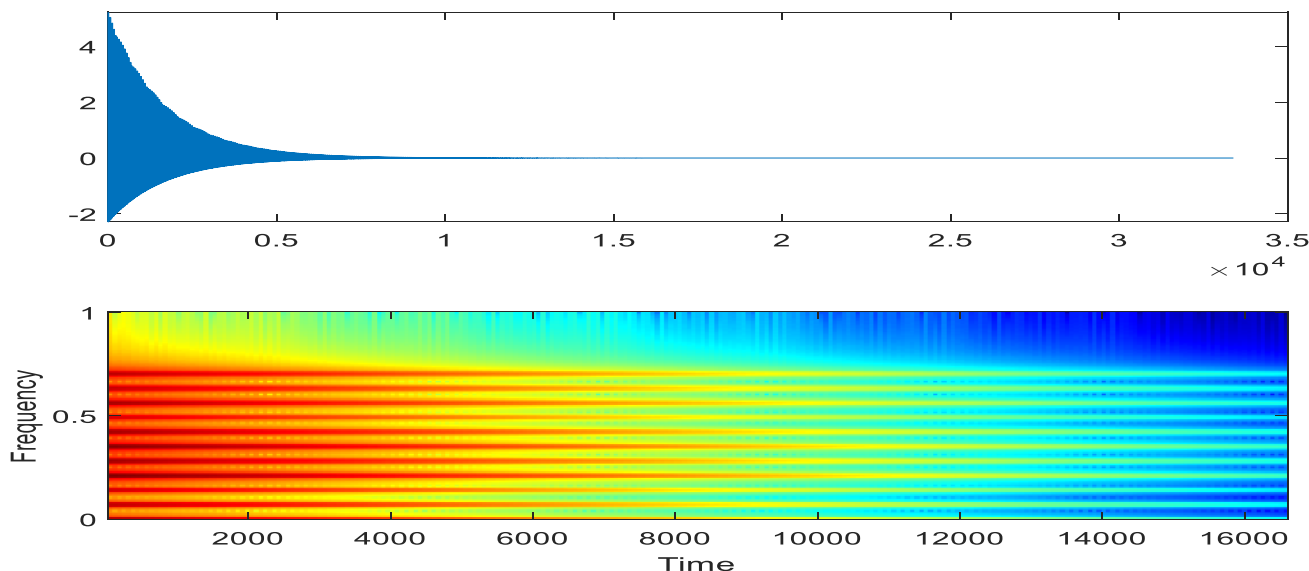


Pulse wave:

$$y = T1 + T2 + T3 + T4 + T5 + T6 + T7 + T8 + T9 + T10;$$

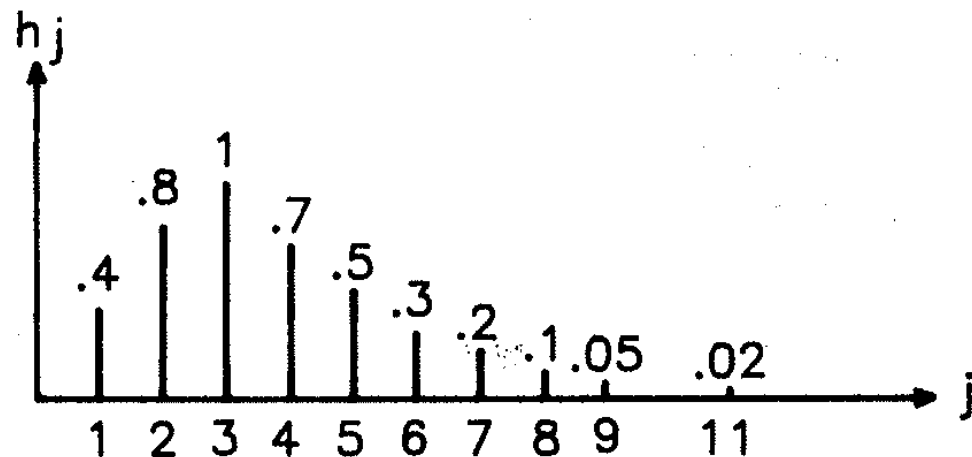


- Tvarovací syntéza s Čebyševovými polynomy
- BANJO

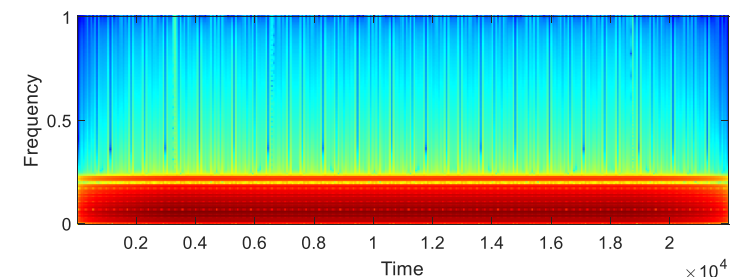
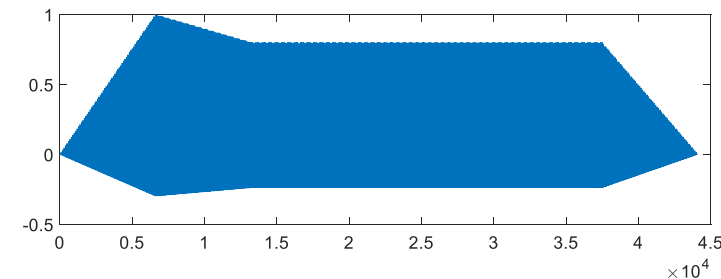


```
H=[-13  -8  5.5 -3.5  2.6 -6.6  -21  -7  -16  -13  -17  -13  -13  -27];
amp1 = 10.^(X./20);
y = 115.0*x.^10 + 40.4*x.^9 - 230.0*x.^8 - 85.3*x.^7 + 151.0*x.^6 ...
    + 79.9*x.^5 - 35.2*x.^4 - 33.5*x.^3 + 0.772*x.^2 + 2.13*x + 0.025;
z=y.*exp(-t./15);
```

- Tvarovací syntéza s Čebyševovými polynomy
- ŽESTĚ



w1 = 0.4;
w2 = 0.8;
w3 = 1.0;
w4 = 0.7;
w5 = 0.5;
w6 = 0.3;
w7 = 0.2;
w8 = 0.1;
w9 = 0.05;
w10 = 0;
w11 = 0.02;



$$F = w1.*T1 + w2.*T2 + w3.*T3 + w4.*T4 + w5.*T5 + w6.*T6 \dots$$

$$+ w7.*T7 + w8.*T8 + w9.*T9 + w10.*T10 + w11.*T11$$

$$y = 20.48*x.^{11} - 43.52*x.^{9} + 12.80*x.^{8} + 40.32*x.^{7} - 16.00*x.^{6} \dots$$

$$- 17.44*x.^{5} + 7.20*x.^{4} + 3.60*x.^{3} - 1.80*x.^{2} - 1.27*x - 0.30;$$

Praktické aplikace tvarovací syntézy

•Hudební syntezátory:

- Používána v digitálních syntezátorech (např. Yamaha DX7, Korg OASYS).
- Generuje bohatá harmonická spektra.

•Softwarové nástroje:

- Implementována ve VST pluginech (NI Massive, Serum, Reaktor).
- Experimentální zvuky v Max/MSP a Pure Data.

•Audio efekty:

- Zkreslení u kytarových a dalších zvukových efektů.
- Přidává signálu harmonický obsah.

•Sound design:

- Tvoří unikátní textury pro hry, film a experimentální hudbu.

•Zvuk ve hrách a filmu:

- Zvukové efekty (futuristické zbraně, ambientní zvuky).

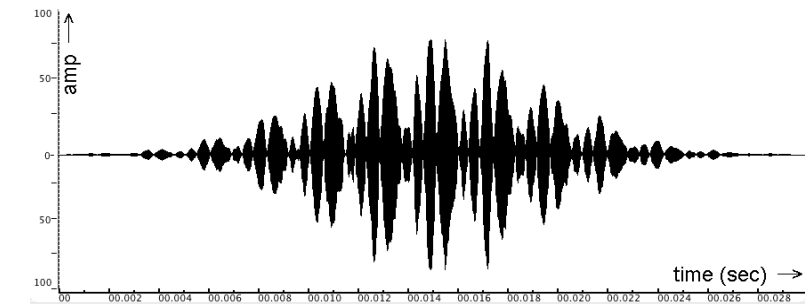
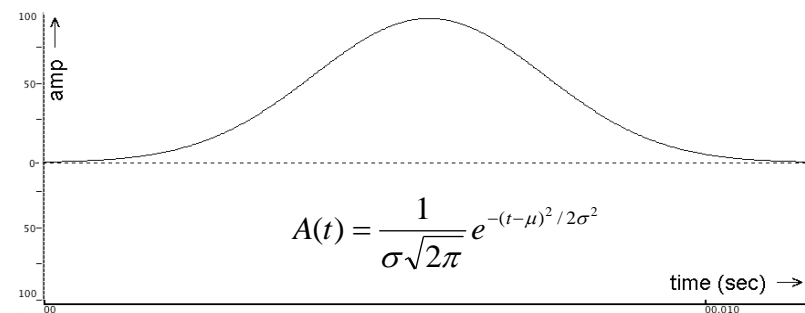
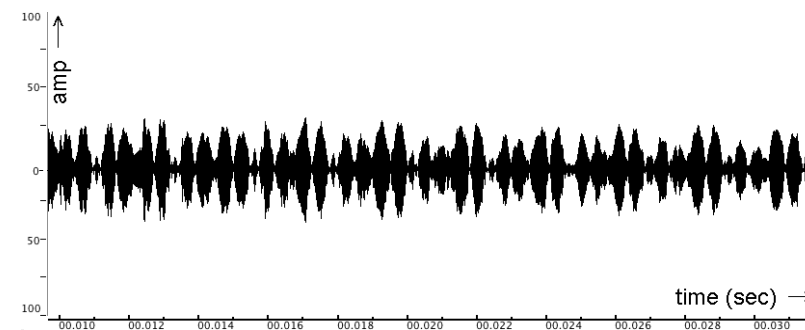
- **Historie:**

- **Denis Gabor** (1947) navrhl koncept „akustických kvant“ jako alternativu k popisu zvuku pomocí sinusových vln.
- Klasická definice granulační syntézy říká, že akustická kvanta jsou malé, nezávislé „výbuchy“ harmonických oscilací (např. sinusových vln) s amplitudovou obálkou založenou na Gaussově rozdělení.
- **Barry Truax** jako první vyvinul software umožňující real-time granulační syntézu. Jeho nejznámější dílo využívající tento systém je Riverrun (1986).



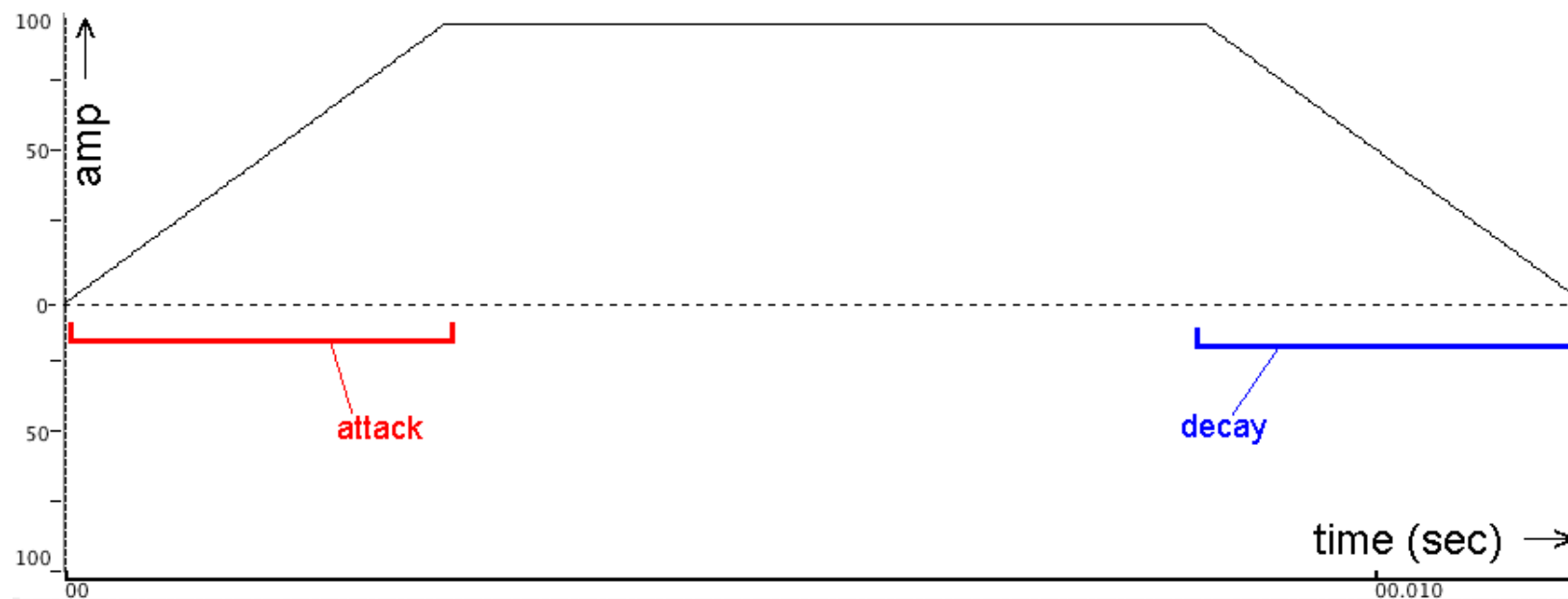
Základní stavební prvky granulační syntézy:

- **Vzorkovaný audio signál:** Reprezentuje vstupní zvuk rozdělený na malé segmenty pro granulační zpracování.
- **Gaussova obálka:** Hladká amplitudová obálka aplikovaná na jednotlivá zrna, která umožňuje jejich plynulé spojení.
- **Zvukové zrno:** Kombinace krátkého úseku zvuku a jeho obálky - základní jednotka granulační syntézy.



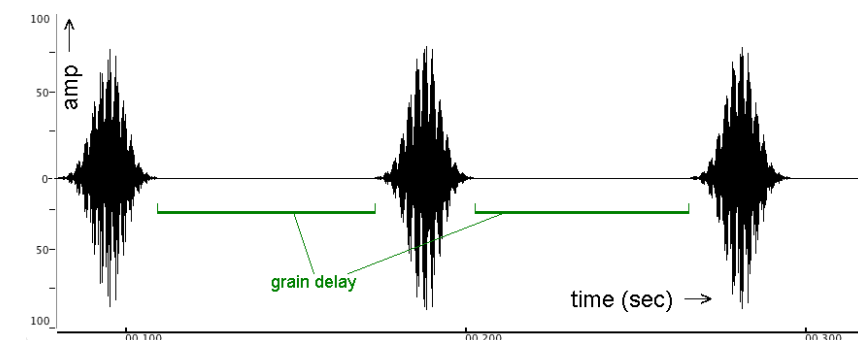
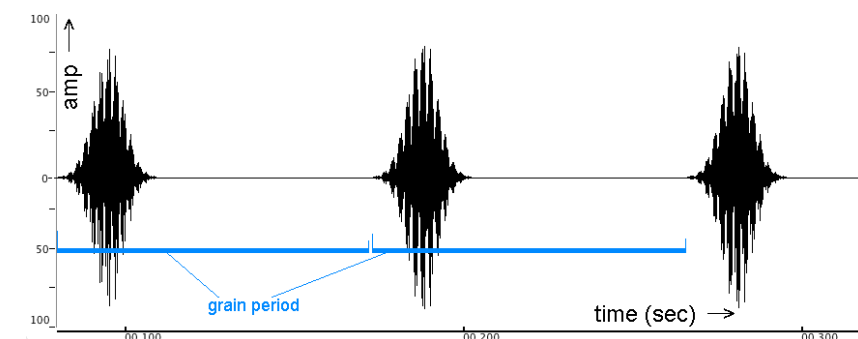
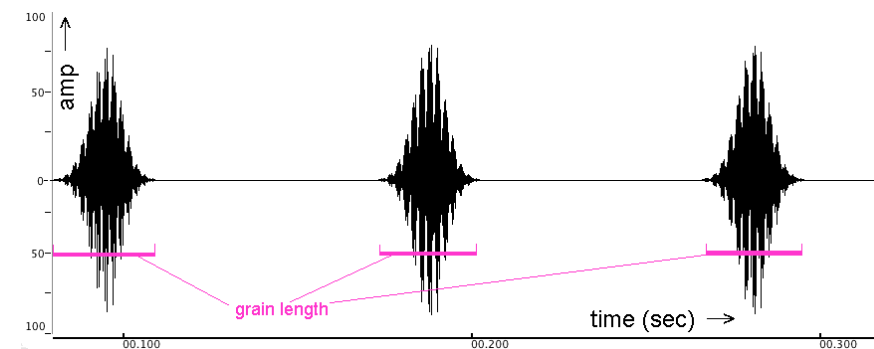
Granulační syntéza

- **Alternativní tvary zrn: lichoběžníková obálka (Truax)**
často se používá pro přesnější kontrolu tvaru a délky zvukového zrna.



Granulační syntéza

- **Délka zrna (Grain length):**
Doba trvání jednotlivého zrna.
- **Perioda zrna (Grain period):**
Čas mezi začátky po sobě jdoucích zrn.
- **Zpoždění (Delay):**
Časový posun aplikovaný na přehrávání zrna.



Délka zrna a percepce

- Typická délka zrn se pohybuje mezi 1 a 50 ms.
- Aby byl zvuk vnímán jako souvislý, zrna musí mít minimální délku:
 - **Vysoké frekvence:** alespoň **13 ms**.
 - **Nízké frekvence:** alespoň **45 ms**.
- Zrna delší než **50 ms** mohou být vnímána spíše jako jednotlivé zvukové události než jako souvislá textura.

Pozn.: Limity 13/45/50 ms vycházejí z percepčních studií (časové rozlišení sluchu).

Krátká zrna (~ 13 ms) u vf stále znějí spojitě (nad cca 1 kHz), zatímco u nf (~ 45 ms) je nutné delší zrno (kolem 100–200 Hz); zrna nad ~50 ms bývají vnímána jako jednotlivé události.

Granulační syntéza

- **Obsah zrn (Grain Content) přispívá k barvě zvuku:**

- **Monochromatická:** jednotná zvuková zrna.
- **Polychromatická:** různorodá zrna s rozdílnou barvou zvuku.
- **Transchromatická:** postupné změny barvy zvuku mezi zrny.



- **Hustota zrn (Density of grains) – počet zrn za sekundu:**

- **Velmi řídká:** jen několik zrn za sekundu (např. 47).
- **Řídká:** střední hustota (např. 230).
- **Hustá:** vysoká hustota (např. 2300).
- **Proměnná:** přechod z malé hustoty do vysoké nebo naopak (např. 47 → 4700).



- **Distribuce zrn (Grain Distribution):**

- **Deterministická:** zrna jsou pravidelně rozmístěná.
- **Náhodná:** nepravidelná distribuce v čase a/nebo prostoru.



Typy zvukových „mraků“:

- **Kumulus:** Dense clusters of grains with significant variation.
- **Stratus:** Thin, uniform layers of sound.

Parametry zvukových mraků:

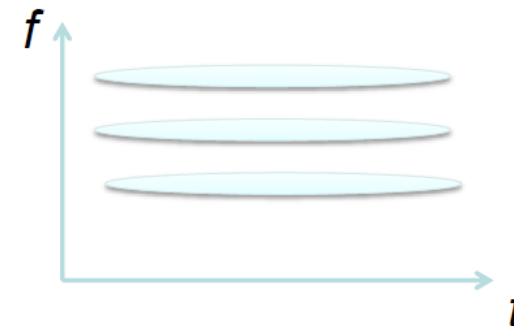
- Počáteční čas a délka trvání.
- Šířka pásma (bandwidth) mraku.
- Amplitudová obálka zrna.
- Hustota zrn.
- Obálka/délka jednotlivých zrn.
- Tvar vlny zrna.
- Prostorové rozložení.

• Příklady časového chování zrn:

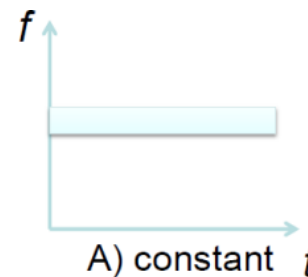
- **Konstantní:** Pevné intervaly mezi zrny.
- **Variabilní:** Náhodné časování mezi zrny.
- **Glissando:** Plynulé změny výšky tónu uvnitř zrn.



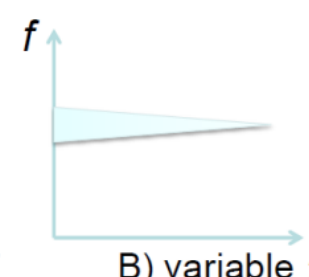
A) cumulus



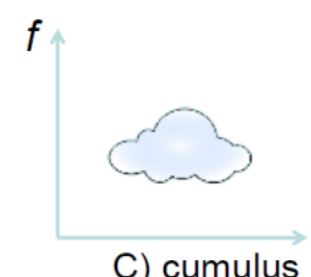
B) stratus



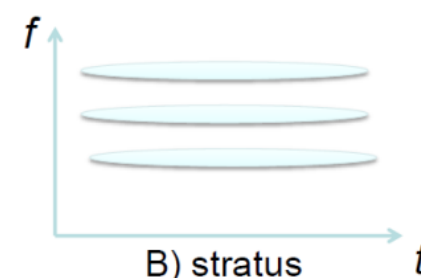
A) constant t



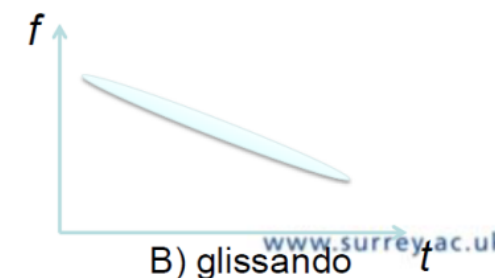
B) variable t



C) cumulus t

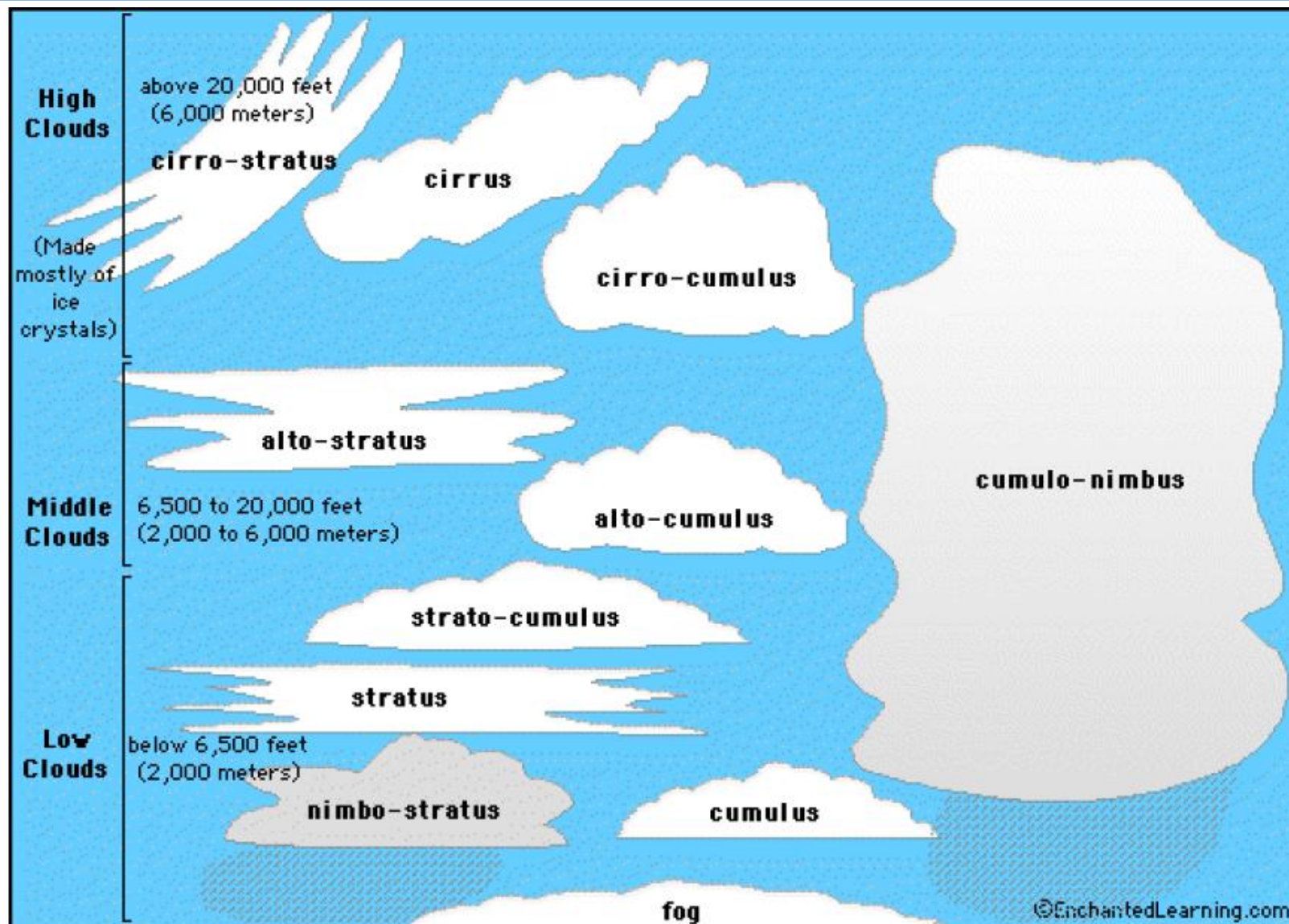


B) stratus





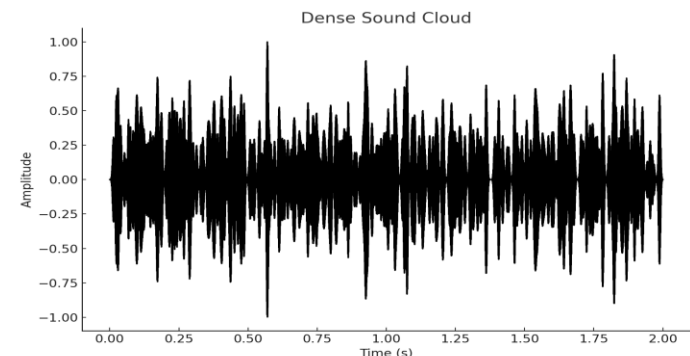
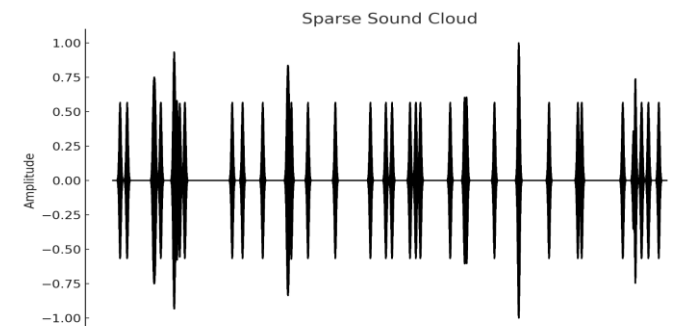
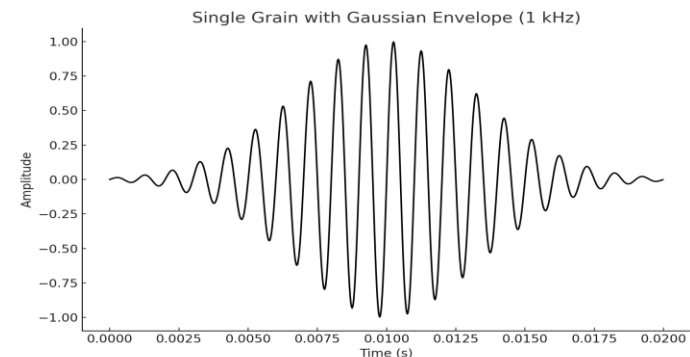
B) glissando

Granulační syntéza



Časová doména

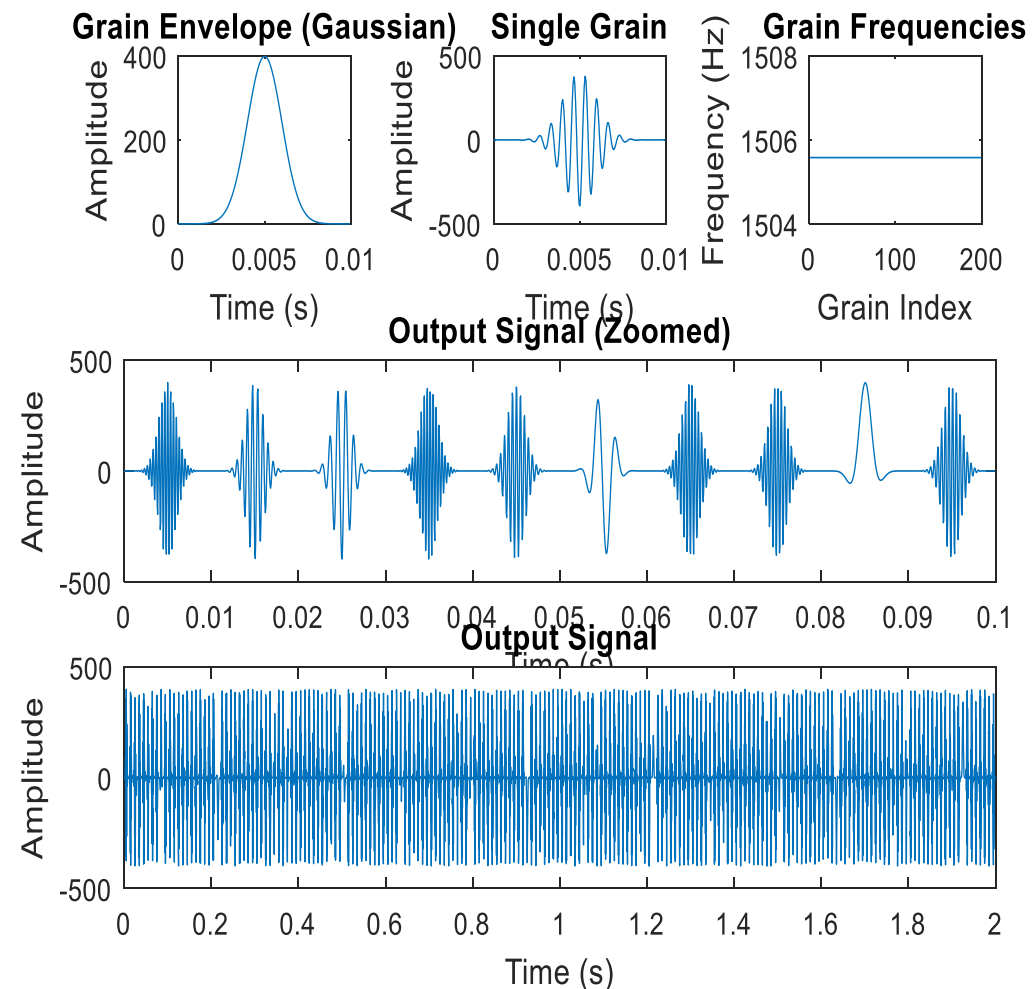
- Jednotlivé zrno (1 kHz sinusovka) 
 - Zrno tvoří sinusový signál o frekvenci 1 kHz modulovaný Gaussovskou obálkou.
 - Zrna jsou základními stavebními prvky granulační syntézy.
- Řídký zvukový mrak (nízká hustota zrn) 
 - Řídký mrak je tvořen zrny s nízkou hustotou výskytu.
 - Vzniká lehká, „vzdušná“ textura, často používaná pro ambientní efekty.
- Hustý zvukový mrak (vysoká hustota zrn) 
 - Hustý mrak vzniká při vysoké hustotě zrn.
 - Výsledkem je bohatá, spojitá textura, často využívaná v kinofilmovém a experimentálním zvukovém designu.



Příklad v časové doméně

- Účel
 - Demonstrovat granulační syntézu vytvoření zvuku složeného z překrývajících se „zrn“.
 - Ukázat vliv délky zrna, rozestupu zrn a jejich frekvenční variability na výsledný zvuk.

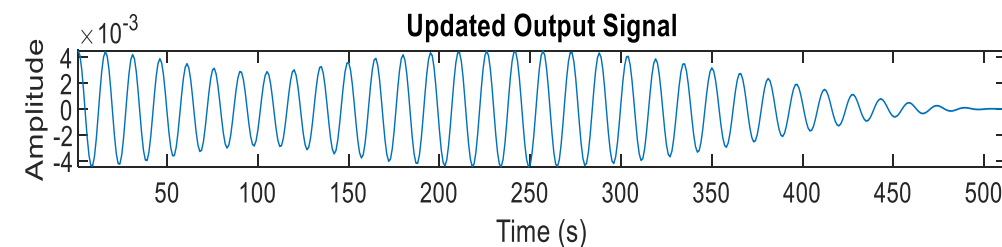
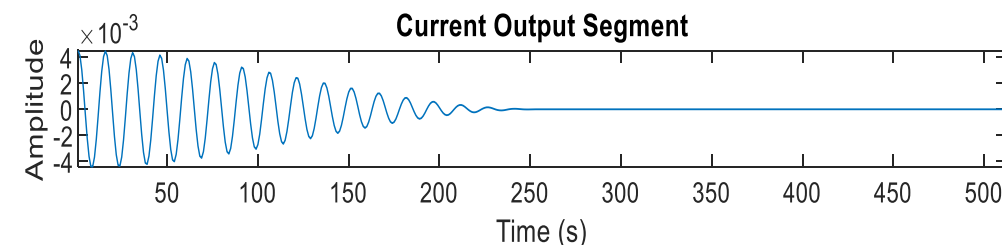
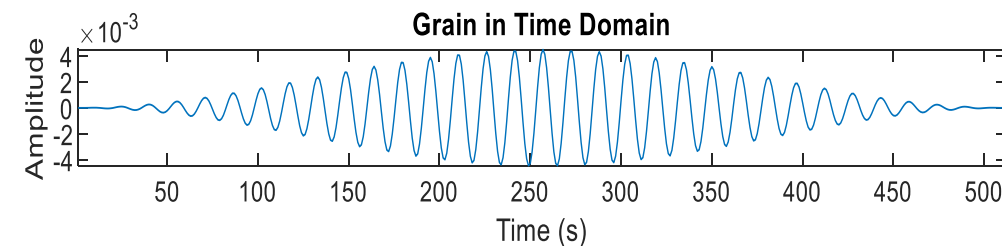
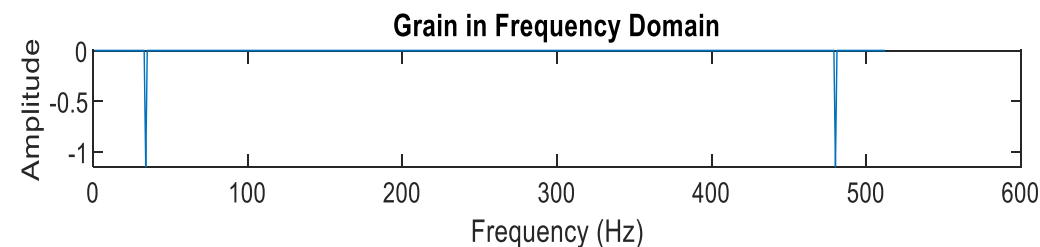
- Klíčové parametry
 - Vzorkovací frekvence (f_s): 20 000 Hz
 - Délka zrna: 10 ms
 - Rozestup zrn: 10 ms
 - Gaussovská obálka: řídí amplitudní profil jednotlivých zrn.



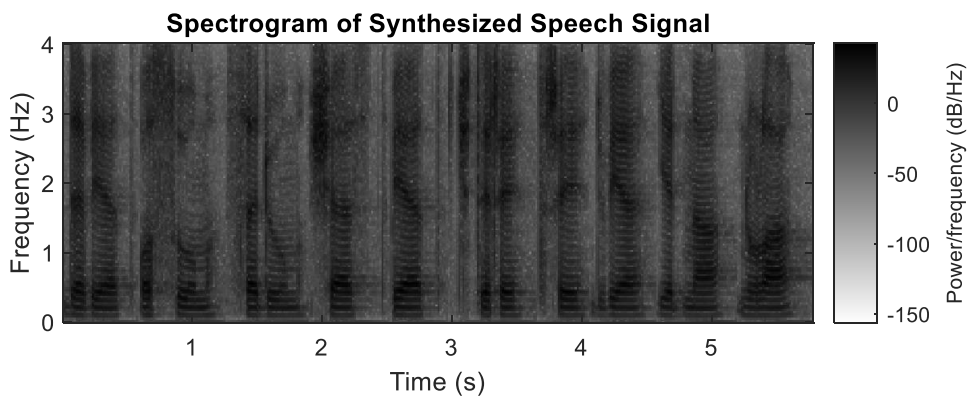
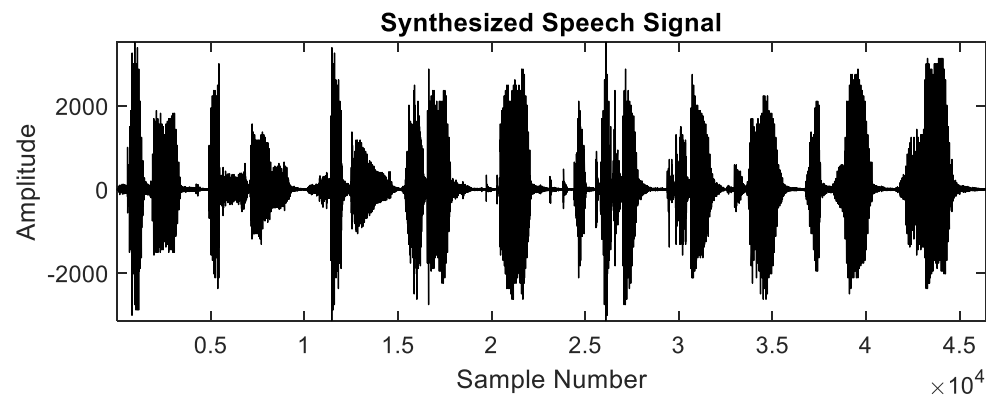
Příklad ve frekvenční doméně

Generování zrn ve spektrální oblasti

- **Definice parametrů:**
 - Šířka pásma (bw),
 - Střední frekvence (fc),
 - Hustota (d).
 - Velikost FFT (nfft),
 - Počet zrn (n_seg).
- **Generování zrn ve frekvenční doméně:**
 - Náhodný výběr frekvenčních složek podle zadané šířky pásma a hustoty.
 - Příklad: `*y = sparse(...)`
- **Transformace do časové domény:**
 - Aplikace inverzní FFT na každé zrno.
 - Použití Hanningova okna pro vyhlazení.
- **Kombinace zrn:**
 - Překryvné sčítání (overlap-add) pro vytvoření výsledného zvukového signálu.



- **Jednoduchá konkatenáční syntéza českých číslic**

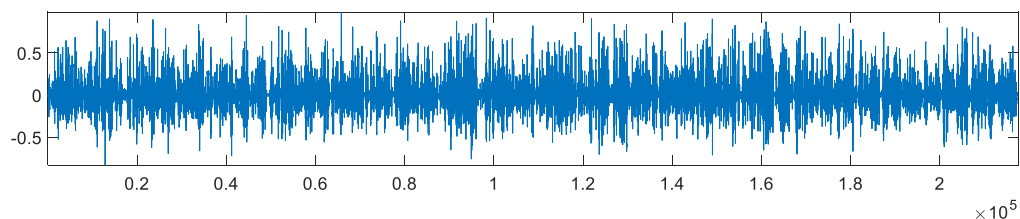
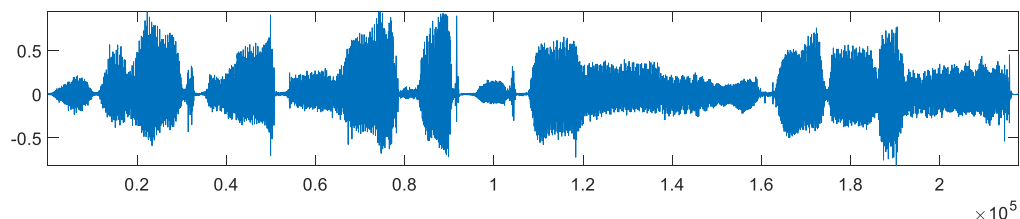
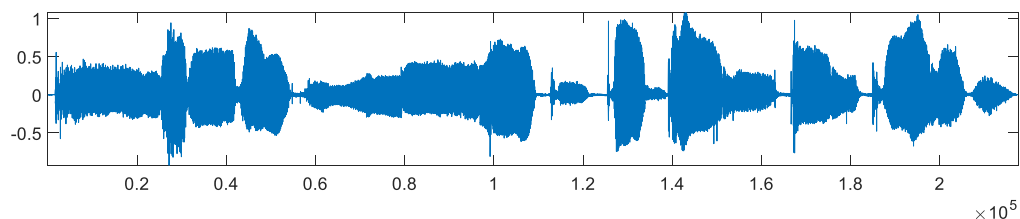
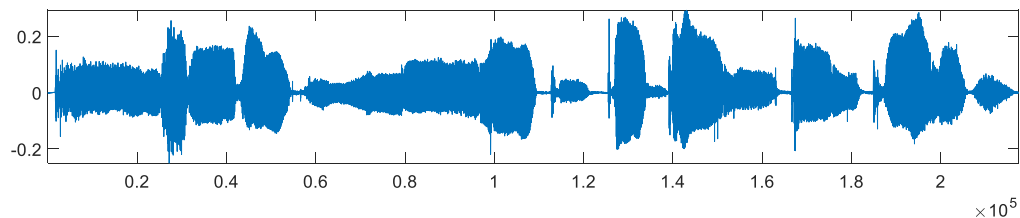


- **Syntetizovaný řečový signál** vytvořený jednoduchým řetězením samostatně zaznamenaných českých číslic.

- **Spektrogram** ukazuje plynulé navázání segmentů, ale také přirozené rozdíly mezi jednotlivými číslicemi.



Zechniky konkatenací rekonstrukce - ukázka tří způsobů rekonstrukce signálů



Normální pořadí



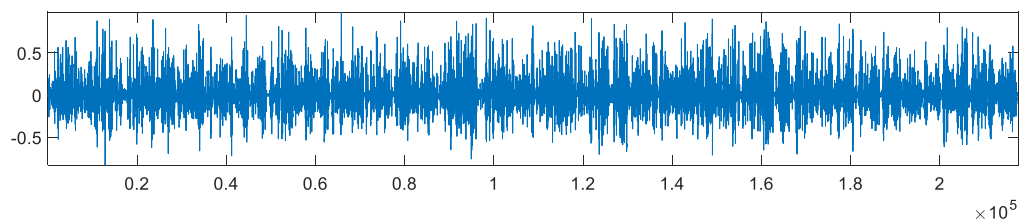
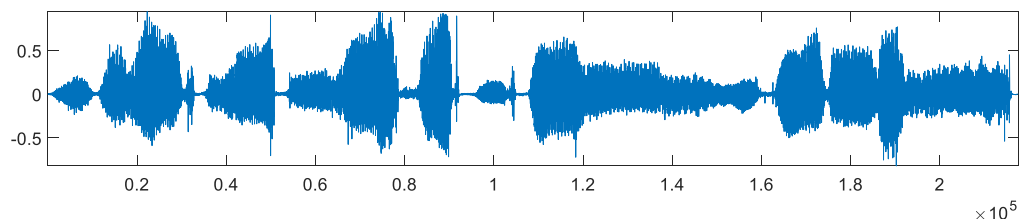
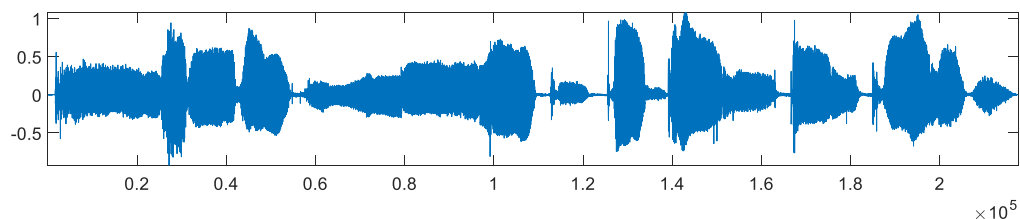
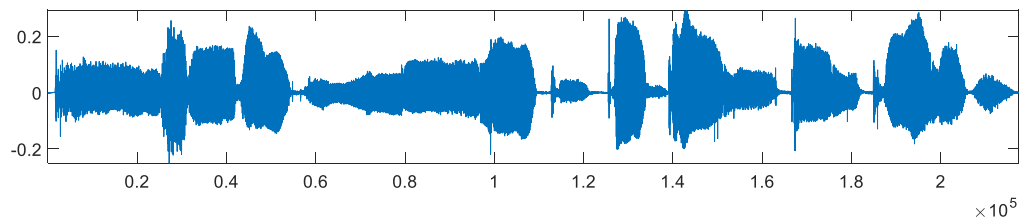
Obrácené pořadí



Náhodné pořadí



Zechniky konkatenací rekonstrukce - ukázka tří způsobů rekonstrukce signálů



Normální pořadí



Obrácené pořadí

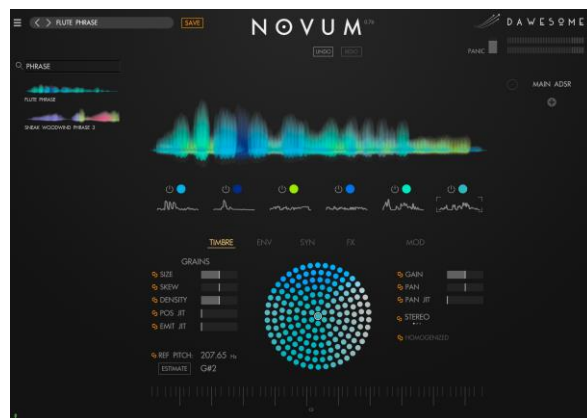


Náhodné pořadí

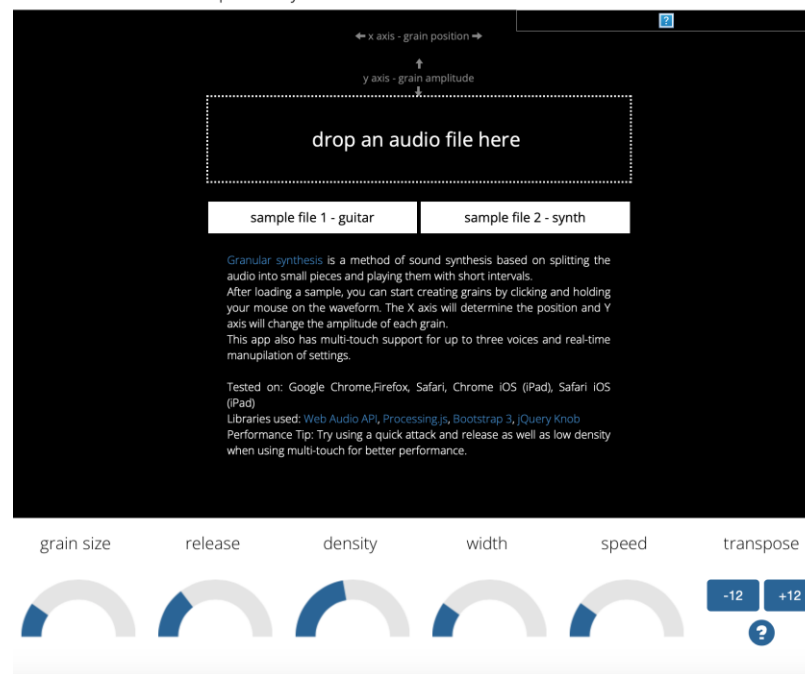


Software – webové aplikace

- Web Audio Granular Synthesiser:
<https://zya.github.io/granular/>
- Komerční aplikace
 - Cubase Padshop Granular Synthesiser
 - Novum Granular Synthesis
 - Granite Granular Syntehiser



Multi-Touch Granular Sampler 1.0 by ZYA Fork me on GitHub



Aplikace v sound designu:

- **Vyniká při generování komplexních, přirozených textur, jako jsou:**
 - Praskající oheň
 - Bublající voda
 - Poryvy větru
 - Exploze
- **Nevhodná pro klasické hudební barvy (např. housle, flétna, klavír).**