Vzorové zadání

1. [10 bodů] Je dána funkce
$$f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_3} + x_1^2 - 2\alpha x_1 x_2 + x_2^4\,,$$
kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je parametr.
   (a) Pro jaké hodnoty parametru α je f konvexní?
   (b) Ukažte, že pro $\alpha = 0$ je množina
   $$M = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 | f(x_1, x_2, x_3) \le 1, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\}$$
   konvexní.

2. [10 bodů] Nechť
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Nalezněte všechny body minima funkce $f(x) = \|Ax - b\|^2$ na $\mathbb{R}^2$.

3. [15 bodů] Je dána úloha
$$\begin{array}{ll} \text{minimalizujte} & -2x_1 + x_2 \\ \text{za podmínek} & x_1 - x_2 \le 0 \\ & x_1^2 + x_2^2 \le 8 \end{array}$$
   (a) Napište KKT podmínky pro tuto úlohu.
   (b) Ověřte, že KKT podmínky jsou splněny v bodě $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   (c) Využitím KKT podmínek zdůvodněte, proč $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ je řešením zadané úlohy.

4. [15 bodů] Nechť $\Gamma(A)$ je maticová hra určená maticí
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$
Pomocí úlohy lineárního programování nalezněte cenu hry $\Gamma(A)$ a optimální strategii prvního hráče.