Optimalizace a teorie her

Úvod

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
bohata@math.feld.cvut.cz

Základní informace

Stránky předmětu:
https://moodle.fel.cvut.cz/courses/A8B01OGT

Obsah kurzu:

1. Formulace optimalizační úlohy
2. Základy konvexní analýzy v $\mathbb{R}^n$
3. Podmínky optimality
4. Dualita
5. Lineární a kvadratické programování
6. Vybrané numerické metody v optimalizaci
7. Úvod do teorie her

Kde lze potkat optimalizaci nebo teorii her?

L. Euler: „Nothing takes place in the world whose meaning is not that of some maximum or minimum.“

- Matematika
- Fyzika
- Řízení
- Zpracování signálu
- Zpracování obrazu
- Komunikace
- Elektronika
- Energetika
- Umělá inteligence
- Ekonomie

$\vdots$

Definice

Nechť $f : D \to \mathbb{R}$ a $M \subseteq D$.

- Řekneme, že f ***nabývá v $\hat{x} \in M$ minima*** (resp. ***maxima***) ***na M***, jestliže pro každé $x \in M$ je $f(\hat{x}) \leq f(x)$ (resp. $f(x) \leq f(\hat{x})$).
- Nabývá-li f v $\hat{x}$ minima (resp. maxima), pak $f(\hat{x})$ se nazývá ***minimum*** (resp. ***maximum***) funkce f na M a $\hat{x}$ se nazývá *bod minima* (resp. ***bod maxima***) ***funkce f na M***.
- ***Extrémem*** funkce f na M rozumíme její minimum nebo maximum na M. Body, ve kterých funkce f nabývá extrému na M, nazýváme ***body extrému*** funkce f na M.

- Úmluva: U pojmů z předchozí definice budeme vynechávat „na M", jestliže $M = D$.

Formulace úlohy

Značení:

- $\min_{x \in M} f(x)$ ... minimum funkce f na M;
- $\max_{x \in M} f(x)$ ... maximum funkce f na M;
- $\operatorname{argmin}_{x \in M} f(x)$ ... množina všech bodů minima f na M;
- $\operatorname{argmax}_{x \in M} f(x)$ ... množina všech bodů maxima f na M.

Definice

Pod ***optimalizační úlohou*** rozumíme jakoukoli z následujících úloh:

(U1) Pro $f : D \to \mathbb{R}$ a $M \subseteq D$ nalezněte $\operatorname{argmin}_{x \in M} f(x)$.

(U2) Pro $f : D \to \mathbb{R}$ a $M \subseteq D$ nalezněte $\operatorname{argmax}_{x \in M} f(x)$.

- Zápis úlohy (U1): minimalizujte f na M.
- Zápis úlohy (U2): maximalizujte f na M.
- Nalézt všechna řešení optimalizační úlohy je většinou obtížné. Často se tak spokojíme i s nalezením jediného řešení.

Formulace úlohy

Terminologie:

- f ... ***cílová funkce***;
- M ... ***přípustná množina***;
- Prvky z M ... ***přípustné body***;
- Prvky z $\operatorname{argmin}_{x \in M} f(x)$ ... ***řešení úlohy (U1)***;
- Prvky z $\operatorname{argmax}_{x \in M} f(x)$ ... ***řešení úlohy (U2)***.

Příklad

1. $\operatorname{argmin}_{x \in [0,1]} x = \{0\}$.
2. $\operatorname{argmin}_{x \in (0,1)} x = \emptyset$.
3. $\operatorname{argmin}_{x \in [-\pi,\pi]} |\sin x| = \{-\pi, 0, \pi\}$.
4. $\operatorname{argmin}_{x \in M} 1 = M$.

Souvislost (U1) a (U2)

Tvrzení

Nechť $f : D \to \mathbb{R}$, $M \subseteq D$ *a* $\hat{x} \in M$.

1. $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x\in M} f(x)$ *právě tehdy, když* $\hat{x} \in \operatorname{argmax}_{x\in M} (-f(x))$.
2. *Nabývá-li* f *v nějakém bodě z* M *minima na* M, *pak*

$$\min_{x\in M} f(x) = -\max_{x\in M}(-f(x)).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Dvě důležité oblasti optimalizace jsou:

- Optimalizace v $\mathbb{R}^n$.
- Variační počet.

Opakování

- Prostor $\mathbb{R}^n$ ... lineární prostor všech uspořádaných n-tic reálných čísel. Prvky $\mathbb{R}^n$ budeme považovat za „sloupcové vektory“, tj. je-li $x \in \mathbb{R}^n$, pak píšeme
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$
- Skalární součin na $\mathbb{R}^n$:
$$\langle x, y \rangle = y^T x = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$
- Eukleidovská norma na $\mathbb{R}^n$:
$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Optimalizační úlohy v $\mathbb{R}^n$

Je dána cílová funkce $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, množina $\Omega \subseteq D$ a množina

$$M = \{x \in \Omega \,|\, g_1(x) \leq 0, \ldots, g_k(x) \leq 0, h_1(x) = 0, \ldots, h_l(x) = 0\},$$

kde $g_1, \ldots, g_k, h_1, \ldots, h_l$ jsou reálné funkce definované na Ω.
Úlohu (U1) s cílovou funkcí f a přípustnou množinou M budeme zapisovat ve tvaru:

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizujte} & f(x) \\ \text{za podmínek} & g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, k, \\ & h_j(x) = 0,\ j = 1, \ldots, l, \\ & x \in \Omega. \end{array}$$

Obdobně zapisujeme odpovídající úlohu (U2).

Optimalizační úlohy v $\mathbb{R}^n$

- Terminologie:
  $x \in \Omega$ ... ***přímé omezení***;
  $g_i(x) \leq 0$ ... ***omezení ve tvaru nerovnosti***;
  $h_j(x) = 0$ ... ***omezení ve tvaru rovnosti***.
- Úmluva: Je-li $\Omega = D$, pak přímé omezení budeme v zápisu vynechávat.
- Omezení $g(x) = h(x)$ lze vždy zapsat pomocí dvou omezení $g(x) \leq h(x)$ a $g(x) \geq h(x)$.
- Omezení $g(x) \geq h(x)$ můžeme přepsat do tvaru $-g(x) \leq -h(x)$.
- Omezení $g(x) \leq h(x)$ lze psát ve tvaru $G(x) \leq 0$, kde $G(x) = g(x) - h(x)$.

Příklad

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte } & x^2 + 1 \\ \text{za podmínek } & \frac{3}{x} \leq 1, \\ & x \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Vidíme, že přípustná množina je $M = \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$.

(Je snadné ukázat, že $\operatorname{argmin}_{x \in M} x^2 + 1 = \{3\}$.)

Optimalizační úlohy v $\mathbb{R}^n$

Příklad

$$\begin{aligned} \text{maximalizujte} \quad & \ln x \\ \text{za podmínek} \quad & x \leq 5, \\ & \cos(\pi x) = 1. \end{aligned}$$

Přípustná množina tedy je $M = \{2, 4\}$.

(Zřejmě $\operatorname{argmax}_{x \in M} \ln x = \{4\}$.)

Základní klasifikace oblastí optimalizace v $\mathbb{R}^n$

- Nepodmíněná optimalizace ... přípustná množina je $\mathbb{R}^n$.
- Podmíněná optimalizace ... přípustná množina je vlastní podmnožina množiny $\mathbb{R}^n$.
- Konvexní optimalizace ... přípustná množina M je konvexní a cílová funkce je konvexní (resp. konkávní) na M v případě minimalizační (resp. maximalizační) úlohy.
- Lineární programování ... přípustná množina je konvexní polyedrická množina a cílová funkce je afinní.
- Kvadratické programování ... přípustná množina je konvexní polyedrická množina a cílová funkce je kvadratická.
- Celočíselné programování ... přípustná množina je průnik konvexní polyedrické množiny a množiny $\mathbb{Z}^n$ a cílová funkce je afinní.

Příklad (Proložení bodů přímkou)

Naměřené hodnoty závislosti napětí na rezistoru na protékajícím proudu jsou:

Proud [A]	0,02	0,04	0,06	0,08
Napětí [V]	5,0	10,1	15,8	21,1

Chceme-li z naměřených hodnot určit odpor R metodou nejmenších čtverců, musíme vyřešit úlohu:

minimalizujte

$$f(R) = (0,02R-5)^2+(0,04R-10,1)^2+(0,06R-15,8)^2+(0,08R-21,1)^2$$

na $\mathbb{R}$.

Motivační příklady – optimalizace v $\mathbb{R}^n$

Příklad (Úloha o dietě – příprava salátu)

Jedna porce salátu musí obsahovat alespoň 4g vlákniny, 15mg vitamínu C a 20mg hořčíku. Suroviny na přípravu salátu jsou mrkev, okurka a rajče. Ceny příslušných surovin a zastoupení vyžadovaných látek v těchto surovinách jsou:

	Mrkev	Okurka	Rajče
Vláknina [g/kg]	29	7	16
Vitamín C [mg/kg]	45	137	187
Hořčík [mg/kg]	180	90	80
Cena [Kč/kg]	25	20	30

Cílem je najít takové složení salátu, aby cena za porci byla co nejnižší při splnění předepsaných podmínek.

Motivační příklady – optimalizace v $\mathbb{R}^n$

Příklad (Úloha o dietě – příprava salátu)

Označme x_M množství mrkve, x_O množství okurek a x_R množství rajčat (vše v kilogramech), která jsou potřebná k přípravě jedné porce salátu. Potom zadaný problém vede na optimalizační úlohu

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizujte} & 25x_M + 20x_O + 30x_R \\ \text{za podmínek} & 29x_M + 7x_O + 16x_R \geq 4, \\ & 45x_M + 137x_O + 187x_R \geq 15, \\ & 180x_M + 90x_O + 80x_R \geq 20, \\ & x_M, x_O, x_R \geq 0. \end{array}$$

Motivační příklady – optimalizace v $\mathbb{R}^n$

Příklad (Volba investice)

Banka nabízí dva investiční produkty.

- Očekávaný měsíční výnos prvního investičního produktu (v tis. Kč) při investici x (v tis. Kč) je $\frac{2x}{4x+25}$.
- Očekávaný měsíční výnos druhého investičního produktu (v tis. Kč) při investici x (v tis. Kč) je $\frac{x}{x+50}$.
- Jakým způsobem má investor rozdělit částku $c = 100000$Kč mezi uvedené dva investiční produkty tak, aby celkový očekávaný měsíční výnos byl co největší?

$$\begin{aligned} \text{maximalizujte} \quad & \frac{2x}{4x+25} + \frac{y}{y+50} \\ \text{za podmínek} \quad & x + y = 100, \\ & x, y \geq 0. \end{aligned}$$

Motivační příklady – optimalizace v $\mathbb{R}^n$

Příklad (Klasifikační úloha)

- V $\mathbb{R}^n$ jsou dány množiny bodů $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ a $B = \{b_1, \ldots, b_l\}$.
- Ať $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ a $\lambda \in \mathbb{R}$.
- H je nadrovina o rovnici $\langle x, w\rangle + \lambda = 0$.
- H_1 je nadrovina o rovnici $\langle x, w\rangle + \lambda = 1$ a H_2 je nadrovina o rovnici $\langle x, w\rangle + \lambda = -1$.
- Chceme určit w a λ tak, aby množiny A, B byly od sebe optimálně odděleny nadrovinami H_1, H_2. Přesněji chceme, aby množiny A a B ležely v disjunktních poloprostorech určených nadrovinami H_1 a H_2 (A v poloprostoru určeném H_1 a B v poloprostoru určeném H_2) a vzdálenost mezi H_1 a H_2 byla co největší.
- Vzdálenost mezi nadrovinami H_1 a H_2 je $\frac{2}{\|w\|}$. Dále $\frac{1}{\|w\|}$ je vzdálenost H od H_1 a také vzdálenost H od H_2.

Motivační příklady – optimalizace v $\mathbb{R}^n$

Příklad (Klasifikační úloha)

1. Hledané parametry w a λ jsou řešením úlohy

$$\begin{aligned} &\text{maximalizujte } g(w,\lambda) = \frac{2}{\|w\|} \\ &\text{za podmínek } \quad \langle a_i, w\rangle + \lambda \geq 1 \text{ pro všechna } i = 1,\ldots,k, \\ &\qquad\qquad\qquad \langle b_j, w\rangle + \lambda \leq -1 \text{ pro všechna } j = 1,\ldots,l. \end{aligned}$$

2. $(\hat{w}, \hat{\lambda})$ je řešením úlohy z předchozího bodu právě tehdy, když je řešením úlohy (kvadratického programování) ve tvaru

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte } h(w,\lambda) = \frac{1}{2}\|w\|^2 \\ &\text{za podmínek } \quad \langle a_i, w\rangle + \lambda \geq 1 \text{ pro všechna } i = 1,\ldots,k, \\ &\qquad\qquad\qquad \langle b_j, w\rangle + \lambda \leq -1 \text{ pro všechna } j = 1,\ldots,l. \end{aligned}$$

Ukázka optimalizační úlohy z variačního počtu

Příklad (Nejkratší spojnice dvou bodů)

V rovině jsou dány body $P = (0,0)^T$ a $Q = (1,1)^T$. Chceme nalézt nejkratší spojnici bodů P a Q mezi všemi křivkami danými grafy funkcí z prostoru $C^1([0,1])$, jejichž počáteční bod je P a koncový Q.

Hledáme tedy řešení optimalizační úlohy

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte} \quad & \int_0^1 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x \\ \text{za podmínek} \quad & f(0) = 0, \\ & f(1) = 1, \\ & f \in C^1([0,1]). \end{aligned}$$