

Optimalizace a teorie her

Podmínky optimality

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
bohata@math.feld.cvut.cz

Přípustné směry a směry poklesu

- Chceme lokálně aproximovat přípustnou množinu nějakou jednodušší množinou.
- Jakým směrem se lze pohnout o malý krok z daného bodu, aniž opustíme přípustnou množinu?

Definice

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$ a $x \in M$.

- Vektor $d \in \mathbb{R}^n$ se nazve **přípustný směr** množiny M v bodě x , jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $\alpha \in (0, \delta]$ je $x + \alpha d \in M$.
 - Množina $\mathcal{F}(M; x)$ všech přípustných směrů množiny M v bodě x se nazývá **kužel přípustných směrů** množiny M v bodě x .
- $\mathcal{F}(M; x) \neq \emptyset$.
 - Je-li $x \in \text{int}(M)$, pak $\mathcal{F}(M; x) = \mathbb{R}^n$.
 - Je-li M konečná (neprázdná), pak $\mathcal{F}(M; x) = \{0\}$ pro každé $x \in M$.

Přípustné směry a směry poklesu

Příklad

① Je-li $M = S(0; 1)$, pak $\mathcal{F}(M; x) = \{0\}$ pro každé $x \in M$.

② Je-li $C = B(0; 1)$ a $\hat{x} = (1, 0)^T$, pak

$$\mathcal{F}(C; \hat{x}) = \left\{ \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid d_1 < 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

- Jakým směrem se pohnout z daného bodu, aby cílová funkce klesala?

Definice

Nechť $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in D$ a $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

- Vektor $d \in \mathbb{R}^n$ se nazve **směr poklesu** funkce f v bodě x , jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $\alpha \in (0, \delta]$ je $f(x + \alpha d) < f(x)$.
- Množina $\mathcal{D}(f; x)$ všech směrů poklesu funkce f v bodě x se nazývá **kužel směrů poklesu** funkce f v bodě x .
- Definice implicitně obsahuje podmínku $[x, x + \delta d] \subseteq D$.

Tvrzení (Nutná geometrická podmínka lokálního extrému)

Jestliže x je bod lokálního minima funkce $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ na $M \subseteq D$, pak $\mathcal{F}(M; x) \cap \mathcal{D}(f; x) = \emptyset$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

- Implikaci nelze obrátit. Jestliže $f(x_1, x_2) = x_2$,

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1 \right\} \quad \text{a} \quad \hat{x} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

pak

$$\mathcal{F}(M; \hat{x}) \cap \mathcal{D}(f; \hat{x}) = \emptyset.$$

Přesto $\hat{x}$ není bodem lokálního minima. Tím je bod $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Přípustné směry a směry poklesu

- Kužel $\mathcal{D}(f; x)$ je obtížné najít. Pokusíme se proto tento kužel „linearizovat“.

Definice

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $x \in \Omega$ a $f \in C^1(\Omega)$.

- Vektor $d \in \mathbb{R}^n$ se nazve **silný směr poklesu** funkce f v bodě x , jestliže $\langle \nabla f(x), d \rangle < 0$.
 - Množina $\mathcal{D}_0(f; x)$ všech silných směrů poklesu funkce f v bodě x se nazývá **kužel silných směrů poklesu** funkce f v bodě x .
- Kužel $\mathcal{D}_0(f; x)$ je množina všech řešení lineární nerovnice

$$\langle \nabla f(x), d \rangle < 0.$$

- $\mathcal{D}_0(f; x)$ je konvexní kužel.

Přípustné směry a směry poklesu

Tvrzení

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $x \in \Omega$ a $f \in C^1(\Omega)$. Potom platí:

- ❶ Je-li $d \in \mathcal{D}(f; x)$, potom $\langle \nabla f(x), d \rangle \leq 0$.
- ❷ $\mathcal{D}_0(f; x) \subseteq \mathcal{D}(f; x)$ (tj. jestliže $\langle \nabla f(x), d \rangle < 0$, pak $d \in \mathcal{D}(f; x)$).

Důkaz: Viz přednáška. ■

- Implikace v ❶ nelze obrátit. Uvažme například funkci $f(x) = 1$. Pak $f'(x)d = 0$ pro každé $d \in \mathbb{R}$, ale $\mathcal{D}(f; x) = \emptyset$.
- Inkluze v ❷ nelze obrátit. Uvažme například funkci $f(x) = x^3$. Ta má v 0 směr poklesu $d = -1$, ale $d \notin \mathcal{D}_0(f; 0)$.

Věta (Fermatova věta)

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $M \subseteq \Omega$ a $\hat{x} \in M$ je bodem lokálního minima funkce $f \in C^1(\Omega)$ na M . Potom platí:

- ❶ $\mathcal{F}(M; \hat{x}) \cap \mathcal{D}_0(f; \hat{x}) = \emptyset$ (tj. $\langle \nabla f(\hat{x}), d \rangle \geq 0$ pro všechny $d \in \mathcal{F}(M; \hat{x})$).
- ❷ Jestliže $\hat{x} \in \text{int}(M)$, pak $\nabla f(\hat{x}) = 0$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

- Podmínka ❶ (a tedy také nulovost gradientu v bodě ❷) je nutná, nikoli postačující.
- Jaké dodatečné požadavky zajistí, aby podmínka ❶ byla postačující pro existenci lokálního minima v bodě $\hat{x}$?

Základní podmínky optimality

Věta (O nutných a postačujících podmínkách pro konvexní úlohu)

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f \in C^1(\Omega)$ je konvexní na $C \subseteq \Omega$ a $\hat{x} \in C$. Potom platí:

- 1 $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in C} f(x)$ právě tehdy, když $\mathcal{F}(C; \hat{x}) \cap \mathcal{D}_0(f; \hat{x}) = \emptyset$.
- 2 Předpokládejme, že $\hat{x} \in \operatorname{int}(C)$. Pak $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in C} f(x)$ právě tehdy, když $\nabla f(\hat{x}) = 0$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

Je dána funkce

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1 - 2x_2.$$

Funkce f je ryze konvexní. Jediným bodem minima funkce f je $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Základní podmínky optimality

Příklad

Ať $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $D \in \mathbb{M}_{r,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$ a $\lambda > 0$. Je dána úloha (regularizovaných nejmenších čtverců)

minimalizujte $f(x) = \|Ax - b\|^2 + \lambda \|Dx\|^2$ na $\mathbb{R}^n$.

- 1 Jedná se o konvexní úlohu.
- 2 V případě $D = 0$ se redukuje na úlohu nejmenších čtverců.
- 3 Platí $f(x) = \langle (A^T A + \lambda D^T D)x, x \rangle - 2 \langle Ax, b \rangle + \|b\|^2$.
- 4 Z podmínek optimality pro konvexní úlohu plyne, že $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in M} f(x)$ právě tehdy, když $A^T A \hat{x} + D^T D \hat{x} = A^T b$.

Věta (O podmínkách optimality 2. řádu)

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $M \subseteq \Omega$, $\hat{x} \in \text{int}(M)$ a $f \in C^2(\Omega)$.
Potom platí:

- ① Jestliže $\hat{x}$ je bod lokálního minima funkce f na M , pak $\nabla^2 f(\hat{x})$ je pozitivně semidefinitní.
- ② Jestliže $\nabla f(\hat{x}) = 0$ a $\nabla^2 f(\hat{x})$ je pozitivně definitní, pak $\hat{x}$ je bod ostrého lokálního minima.

Důkaz: Vynecháváme. ■

- Pokud $\hat{x} \in \text{int}(M)$ je bodem ostrého lokálního minima, pak nutně neplatí, že $\nabla^2 f(\hat{x})$ je pozitivně definitní (viz $f(x) = x^4$ a $\hat{x} = 0$).
- Analogie druhého tvrzení z předchozí věty pro semidefinitní matice neplatí (viz $f(x) = x^3$ a $\hat{x} = 0$).

Základní podmínky optimality

Příklad

Je dána funkce

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{3}x_1^3 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_1x_2 + 2x_2.$$

Podezřelé body z lokálního extrému jsou

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- Bod u je bodem ostrého lokálního minima.
- Bod v není bodem lokálního minima ani maxima, neboť v tomto bodě není splněna nutná podmínka druhého řádu pro funkci f ani pro funkci $-f$.

Omezení ve tvaru nerovnosti

- Jak popsat informaci obsaženou v $\mathcal{F}(M; \hat{x})$ pomocí jednodušejí konstruovatelného kuželu?

Definice

Ať $g_1, \dots, g_k$ jsou reálné funkce definované na množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$M = \{x \in \Omega \mid g_1(x) \leq 0, \dots, g_k(x) \leq 0\}$$

a $x \in M$.

- Množina $\mathcal{I}\left((g_i)_{i=1}^k; x\right) := \{i \in \{1, \dots, k\} \mid g_i(x) = 0\}$ se nazývá **indexová množina aktivních omezení** v bodě x .
- Jestliže $i \in \mathcal{I}\left((g_i)_{i=1}^k; x\right)$, pak $g_i(x) \leq 0$ se nazve **aktivní omezení** (ve tvaru nerovnosti) v bodě x .
- Jestliže $i \notin \mathcal{I}\left((g_i)_{i=1}^k; x\right)$, pak $g_i(x) < 0$ se nazve **neaktivní omezení** (ve tvaru nerovnosti) v bodě x .

Omezení ve tvaru nerovnosti

Definice

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $g_1, \dots, g_k \in C^1(\Omega)$, $x \in M$ a $M = \{x \in \Omega \mid g_1(x) \leq 0, \dots, g_k(x) \leq 0\}$. Definujeme množinu

$$\begin{aligned}\mathcal{G}\left((g_i)_{i=1}^k; x\right) &:= \left\{d \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla g_i(x), d \rangle \leq 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}\left((g_i)_{i=1}^k; x\right)\right\} \\ &= \bigcap_{i \in \mathcal{I}\left((g_i)_{i=1}^k; x\right)} \{d \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla g_i(x), d \rangle \leq 0\}.\end{aligned}$$

- $\mathcal{G}\left((g_i)_{i=1}^k; x\right)$ je uzavřený konvexní kužel obsahující 0.
- $\mathcal{G}\left((g_i)_{i=1}^k; x\right)$ (a také $\mathcal{I}\left((g_i)_{i=1}^k; x\right)$) závisí na popisu množiny M . Naproti tomu $\mathcal{F}(M; x)$ je geometrický koncept (tj. nezávisí na konkrétním popisu množiny M).

Omezení ve tvaru nerovnosti

Příklad

Je dána množina

$$M = \left\{ (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 - x_1^3 \leq 0, -x_2 \leq 0 \right\}$$

a bod $\hat{x} = (0, 0)^T$. Označme $g_1(x_1, x_2) = x_2 - x_1^3$ a $g_2(x_1, x_2) = -x_2$. Pak

$$\mathcal{F}(M; \hat{x}) = \left\{ \begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid d_1 \geq 0 \right\},$$

$$\mathcal{G}((g_1, g_2), \hat{x}) = \left\{ \begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid d_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Vidíme, že $\mathcal{F}(M; \hat{x}) \subsetneq \mathcal{G}((g_1, g_2), \hat{x})$. Položme $g_3(x_1, x_2) = -x_1 - x_2$. Pak

$$M = \left\{ (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid g_i(x_1, x_2) \leq 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \right\},$$

$$\mathcal{G}((g_1, g_2, g_3), \hat{x}) = \mathcal{F}(M; \hat{x}).$$

Omezení ve tvaru nerovnosti

- Úmluva: Nemůže-li dojít k nedorozumění, budeme psát jen $\mathcal{I}(x)$ a $\mathcal{G}(x)$ místo $\mathcal{I}\left((g_i)_{i=1}^k; x\right)$ a $\mathcal{G}\left((g_i)_{i=1}^k; x\right)$.
- Lze ukázat, že $\mathcal{F}(M; x) \subseteq \mathcal{G}(x)$. Jak jsme viděli v předchozím příkladě, rovnost obecně nenastává.
- Lze podmínku optimality $\mathcal{F}(M; \hat{x}) \cap \mathcal{D}_0(f; \hat{x}) = \emptyset$ nahradit podmínkou $\mathcal{G}(\hat{x}) \cap \mathcal{D}_0(f; \hat{x}) = \emptyset$?

Příklad

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte } x_1 + x_2 \\ &\text{za podmínek } x_2 - x_1^3 \leq 0, \\ &\quad -x_2 \leq 0. \end{aligned}$$

Bod $\hat{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ je (jediné) řešení, avšak $\mathcal{G}(\hat{x}) \cap \mathcal{D}_0(f; \hat{x}) \neq \emptyset$.

Omezení ve tvaru nerovnosti

- Kužel $\mathcal{G}(x)$ je obecně příliš veliký. Nutné klást dodatečnou podmínku.

Věta (O nutných KKT podmínkách)

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f, g_1, \dots, g_k \in C^1(\Omega)$,

$$M = \{x \in \Omega \mid g_1(x) \leq 0, \dots, g_k(x) \leq 0\}$$

a $\hat{x} \in M$. Jestliže $\overline{\mathcal{F}(M; \hat{x})} = \mathcal{G}(\hat{x})$ a $\hat{x}$ je bod lokálního minima f na M , pak existuje $(\mu_1, \dots, \mu_k)^T \in \mathbb{R}^k$ tak, že

$$\nabla f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^k \mu_i \nabla g_i(\hat{x}) = 0,$$

$$\mu_i g_i(\hat{x}) = 0 \quad \text{pro všechna } i \in \{1, \dots, k\},$$

$$\mu_i \geq 0 \quad \text{pro všechna } i \in \{1, \dots, k\}.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Omezení ve tvaru nerovnosti

Terminologie:

- Podmínky

(P1) $\nabla f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^k \mu_i \nabla g_i(\hat{x}) = 0,$

(P2) $\mu_i g_i(\hat{x}) = 0,$

(P3) $\mu_i \geq 0,$

se souhrně nazývají **KKT podmínky**.

- Podmínka (P1) se nazývá **podmínka stacionarity**.

- Podmínka (P2) se nazývá **podmínka komplementarity**.

- Koeficienty $\mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{R}$ splňující KKT podmínky se nazývají **KKT multiplikátory** (**Lagrangeovy multiplikátory**) v bodě $\hat{x}$.

- Bod $\hat{x}$ se nazve **KKT bod**, existuje-li vektor $(\mu_1, \dots, \mu_k)^T$ KKT multiplikátorů v bodě $\hat{x}$.

Omezení ve tvaru nerovnosti

- Geometrická interpretace KKT podmínek: Gradienty funkcí z aktivních omezení (funkcí g_i , $i \in \mathcal{I}(\hat{x})$) v bodě $\hat{x}$ generují kužel, ve kterém leží $-\nabla f(\hat{x})$.

Příklad

minimalizujte $x_1 + x_2$
za podmínek $x_1, x_2 \geq 0$.

Lze ukázat, že

$$\overline{\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^2; x)} = \mathcal{G}(x)$$

pro každé $x \in \mathbb{R}_+^2$. Bod $\hat{x} = 0$ je jediný KKT bod a jedná se o bod minima.

- Předpoklad $\overline{\mathcal{F}(M; \hat{x})} = \mathcal{G}(\hat{x})$ je jednou z tzv. **podmínek regularity**. Nahradíme-li $\overline{\mathcal{F}(M; \hat{x})} = \mathcal{G}(\hat{x})$ ve větě O nutných KKT podmínkách jakoukoli jinou podmínkou regularity, zůstane věta stále v platnosti.

Omezení ve tvaru nerovnosti

Definice

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $g_1, \dots, g_k \in C^1(\Omega)$ a

$$M = \{x \in \Omega \mid g_1(x) \leq 0, \dots, g_k(x) \leq 0\}.$$

Řekneme, že $(g_i)_{i=1}^k$ splňuje

- (APR) **Afinní podmínku regularity**, jestliže $g_1, \dots, g_k$ jsou afinní;
- (SPR) **Slaterovu podmínku regularity**, jestliže $g_1, \dots, g_k$ jsou konvexní na Ω a existuje $x \in \Omega$ tak, že pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$ je $g_i(x) < 0$;
- (PLN) **Podmínku lineární nezávislosti** v $\hat{x} \in M$, jestliže $\{\nabla g_i(\hat{x}) \mid i \in \mathcal{I}(\hat{x})\}$ je lineárně nezávislá množina vektorů;
- (ZPR) **Zangwillovu podmínku regularity** v $\hat{x} \in M$, jestliže $\overline{\mathcal{F}(M; \hat{x})} = \mathcal{G}(\hat{x})$.

Omezení ve tvaru nerovnosti

Platí:

- Každá z podmínek (APR) a (SPR) implikuje (ZPR) pro každé $\hat{x} \in M$.
- Podmínka (PLN) implikuje (ZPR).

Příklad

minimalizujte $(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2$

za podmínek $x_1 + x_2 \leq 0$,

$$-x_1 \leq 0,$$

$$-x_2 \leq 0.$$

Je splněna afinní podmínka regularity. V každém bodě přípustné množiny jsou tak KKT podmínky nutnými podmínkami optimality.

Omezení ve tvaru nerovnosti

Příklad

minimalizujte x_1

za podmínek $x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1$,

$$x_1^2 + (x_2 + 1)^2 \leq 1.$$

Bod $(0, 0)^T$ je jediný přípustný bod, ale není to KKT bod. Splnění některé z podmínek regularity je tedy nutné i v případě konvexních úloh!

Věta (O postačujících KKT podmínkách)

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f, g_1, \dots, g_k \in C^1(\Omega)$ jsou konvexní funkce na $C = \{x \in \Omega \mid g_1(x) \leq 0, \dots, g_k(x) \leq 0\}$. Jestliže $\hat{x} \in C$ je KKT bod, pak $\hat{x}$ je bod minima funkce f na C .

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte } 2x_1^2 + x_2^2 \\ &\text{za podmínek } x_1^2 + x_2^2 \leq 1, \\ &\qquad\qquad\qquad -x_1 \leq 0. \end{aligned}$$

- Je splněna Slaterova podmínka regularity a všechny funkce vystupující v optimalizační úloze jsou spojitě diferencovatelné a konvexní (na $\mathbb{R}^2$). Tedy KKT podmínky jsou nutné a postačující podmínky optimality.
- Bod $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ je jediný bod minima.

Příklad

$$\begin{aligned} &\text{maximalizujte } (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \\ &\text{za podmíněk } \quad 3x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ &\quad \quad \quad -x_1 + 2x_2 \leq 3, \\ &\quad \quad \quad x_1 \leq 2. \end{aligned}$$

- Předpoklady věty O nutných KKT podmínkách jsou splněny.
- Věta O postačujících KKT podmínkách nelze použít, neboť úloha není konvexní.
- Snadno ověříme, že $(2, 0)^T$ je KKT bod. Je to řešení úlohy?

Příklad

Je dána úloha

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte } \alpha x_1 + x_2 \\ &\text{za podmínek } x_1^2 + x_2^2 \leq 25, \\ &\quad x_1 - x_2 \leq 1, \end{aligned}$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je parametr.

- KKT podmínky jsou nutné a postačující podmínky optimality.
- Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ je řešením úlohy právě tehdy, když $\alpha \leq -1$.

Omezení ve tvaru nerovnosti

Příklad

Ať $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Uvažme úlohu

$$\begin{aligned} &\text{maximalizujte } \langle x, c \rangle \\ &\text{za podmínky } \|x\|^2 \leq 1. \end{aligned}$$

- KKT podmínky jsou

$$\begin{aligned} -c + 2\mu x &= 0, \\ \mu(\|x\|^2 - 1) &= 0, \\ \mu &\geq 0. \end{aligned}$$

- Jediné řešení úlohy je $\hat{x} = \frac{c}{\|c\|}$.

Omezení ve tvaru nerovnosti

Příklad

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte } \frac{x_1}{x_2} \\ &\text{za podmínek } \frac{1}{x_1} + x_2 \leq 2, \\ & \quad \quad \quad x_1, x_2 > 0. \end{aligned}$$

- Uvedená úloha není konvexní.
- Pomocí substituce $x_1 = e^{y_1}$ a $x_2 = e^{y_2}$ lze úlohu „přepsat“ na konvexní úlohu

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte } e^{y_1 - y_2} \\ &\text{za podmínek } e^{-y_1} + e^{y_2} \leq 2. \end{aligned}$$

- Jediné řešení původní úlohy je $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Omezení ve tvaru rovnosti a nerovnosti

Předpokládejme, že $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná otevřená množina a $f, g_1, \dots, g_k, h_1, \dots, h_l \in C^1(\Omega)$. Je dána úloha

minimalizujte $f(x)$

za podmíněk $g_i(x) \leq 0$ pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$,

$h_j(x) = 0$ pro každé $j \in \{1, \dots, l\}$,

$x \in \Omega$.

- Rovnice $h_1(x) = 0, \dots, h_l(x) = 0$ lze zapsat pomocí nerovnic $h_1(x) \leq 0, -h_1(x) \leq 0, \dots, h_l(x) \leq 0, -h_l(x) \leq 0$, a tím problém převedeme na optimalizační úlohu obsahující jen omezení ve tvaru nerovnosti.
- V případě nelineárních funkcí $h_1, \dots, h_l$ ale není kužel $\mathcal{F}(M; x)$ příliš použitelný (běžně $\mathcal{F}(M; x) = \{0\}$). V takovém případě je nutné vybudovat obecnější teorii.

Omezení ve tvaru rovnosti a nerovnosti

Časté jsou ale úlohy, kdy f je navíc konvexní na přípustné množině a $g_1, \dots, g_k, h_1, \dots, h_l$ jsou afinní. Pak

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte } f(x) \\ &\text{za podmínek} \quad \begin{aligned} g_i(x) &\leq 0 && \text{pro každé } i \in \{1, \dots, k\}, \\ h_j(x) &\leq 0 && \text{pro každé } j \in \{1, \dots, l\}, \\ -h_j(x) &\leq 0 && \text{pro každé } j \in \{1, \dots, l\}, \\ x &\in \Omega. \end{aligned} \end{aligned}$$

je konvexní úloha a KKT podmínky jsou nutné a postačující v každém bodě přípustné množiny (je splněna afinní podmínka regularity).