Optimalizace a teorie her

Lineární programování

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
martin.bohata@fel.cvut.cz

Úvod do lineárního programování

Úlohy lineárního programování jsou optimalizační úlohy, ve kterých je

1. cílová funkce afinní (bez újmy na obecnosti se můžeme omezit na lineární funkce);
2. přípustná množina je konvexní polyedrický množina (tj. lze popsat pomocí konečné soustavy lineárních rovnic a nerovnic).

Příklad

Firma vyrábí 2 druhy výrobků A a B. V tabulce je uvedeno množství materiálu (ve vhodných jednotkách) potřebný k výrobě jednotkového množství daného druhu výrobku a také jeho prodejní cena.

	Materiál X	Materiál Y	Cena
Výrobek A	2	3	6000Kč
Výrobek B	4	4	10000Kč

Úvod do lineárního programování

Příklad (Pokračování)

Na skladu je jen 10 jednotek materiálu X a 12 jednotek materiálu Y. Jak mají ve firmě nastavit výrobní proces, aby celková cena za vyrobené množství výrobků byla co největší? Odpověď je skryta v řešení úlohy

$$\begin{aligned} \text{maximalizujte} \quad & 6x_1 + 10x_2 \\ \text{za podmínek} \quad & 2x_1 + 4x_2 \leq 10, \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

- Graficky můžeme nalézt, že maximum se nabývá v bodě $\left(2, \frac{3}{2}\right)^T$. Maximum je $f\left(2, \frac{3}{2}\right) = 27$.
- V řadě úloh může být přirozený dodatečný požadavek $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$. Na první pohled se zdá, že řešením pak bude bod $(2,1)^T$. Avšak řešením je bod $(1,2)^T$.

Úvod do lineárního programování

Příklad (Pokračování)

Obchodník chce od firmy koupit veškerý materiál ze skladu. Jaké ceny za materiál X a Y by měl firmě nabídnout, aby zaplatil co nejmenší částku a firmě se přesto vyplatilo materiál prodat namísto výroby výrobků? Tato otázka vede na úlohu

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte} \quad & 10y_1 + 12y_2 \\ \text{za podmínek} \quad & 2y_1 + 3y_2 \geq 6, \\ & 4y_1 + 4y_2 \geq 10, \\ & y_1, y_2 \geq 0, \end{aligned}$$

kde y_1 je cena za jednotkové množství materiálu X a y_2 je cena za jednotkové množství materiálu Y.

- Uvedená minimalizační úloha je duální k původní maximalizační úloze (to ukážeme později).

Úvod do lineárního programování

Příklad

Úlohu minimalizace funkce $f(x_1, x_2) = |x_1| + |x_1 - x_2 + 1|$ na $\mathbb{R}^2$ lze převést na úlohu lineárního programování

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte} \quad & t_1 + t_2 \\ \text{za podmínek} \quad & x_1 \leq t_1, \\ & -x_1 \leq t_1, \\ & x_1 - x_2 + 1 \leq t_2, \\ & -x_1 + x_2 - 1 \leq t_2, \\ & t_1, t_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Analogicky můžeme na úlohu lineárního programování převést každou úlohu tvaru

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte} \quad & \|Ax - b\|_1 \\ \text{za podmínek} \quad & Cx \leq d, \end{aligned}$$

kde $A, C \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ a $b, d \in \mathbb{R}$.

Úvod do lineárního programování

Příklad

Úlohu minimalizace funkce $f(x_1, x_2) = \max\{|x_1|, |x_1 - x_2 + 1|\}$ na $\mathbb{R}^2$ lze převést na úlohu lineárního programování

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte} \quad & t \\ \text{za podmínek} \quad & x_1 \leq t, \\ & -x_1 \leq t, \\ & x_1 - x_2 + 1 \leq t, \\ & -x_1 + x_2 - 1 \leq t, \\ & t \geq 0. \end{aligned}$$

Analogicky můžeme na úlohu lineárního programování převést každou úlohu tvaru

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte} \quad & \|Ax - b\|_\infty \\ \text{za podmínek} \quad & Cx \leq d, \end{aligned}$$

kde $A, C \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ a $b, d \in \mathbb{R}$.

Tvary zápisu úloh lineárního programování

Nechť $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $x, c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$.

- ***Kanonický tvar:***

$$\begin{array}{llcll} \text{minimalizujte} & \langle x, c\rangle & \qquad & \text{maximalizujte} & \langle x, c\rangle \\ \text{za podmínek} & Ax \geq b, & & \text{za podmínek} & Ax \leq b, \\ & x \geq 0. & & & x \geq 0. \end{array}$$

- ***Standardní tvar:***

$$\begin{array}{llcll} \text{minimalizujte} & \langle x, c\rangle & \qquad & \text{maximalizujte} & \langle x, c\rangle \\ \text{za podmínek} & Ax = b, & & \text{za podmínek} & Ax = b, \\ & x \geq 0. & & & x \geq 0. \end{array}$$

Každou úlohu lineárního programování lze přepsat do výše uvedených tvarů.

Tvary zápisu úloh lineárního programování

Běžné „triky“:

- Maximalizaci $\langle x, c\rangle$ lze nahradit minimalizací $-\langle x, c\rangle$ a obráceně.
- Chybí-li podmínka $x_i \geq 0$, pak zavedeme nové proměnné $y_1, y_2 \geq 0$ tak, že $x_i = y_1 - y_2$.
- Pokud $x_i \leq 0$, pak $y := -x_i \geq 0$.
- Ať $a \in \mathbb{R}$ a $v \in \mathbb{R}^n$.
    - $\langle x, v\rangle \leq a$ lze nahradit $\langle x, v\rangle + s = a$, $s \geq 0$;
    - $\langle x, v\rangle \geq a$ lze nahradit $\langle x, v\rangle - s = a$, $s \geq 0$.

  Nová proměnná s se nazývá ***doplňková proměnná***.

Příklad

Je dána úloha

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte} \quad & x_1 - x_2 \\ \text{za podmínek} \quad & 2x_1 - 3x_2 = 5, \\ & -2 \leq x_2 \leq 3, \\ & x_1 \leq 0. \end{aligned}$$

Příklad (Pokračování)

Kanonický tvar je

$$
\begin{aligned}
\text{minimalizujte} \quad & -y_1 - y_2 + y_3 \\
\text{za podmínek} \quad & -2y_1 - 3y_2 + 3y_3 \geq 5, \\
& 2y_1 + 3y_2 - 3y_3 \geq -5, \\
& y_2 - y_3 \geq -2, \\
& y_3 - y_2 \geq -3, \\
& y_1, y_2, y_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Příklad (Pokračování)

Standardní tvar je

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte} \quad & -y_3 - y_4 + y_5 \\ \text{za podmínek} \quad & y_4 - y_5 - y_1 = -2, \\ & y_4 - y_5 + y_2 = 3, \\ & -2y_3 - 3y_4 + 3y_5 = 5, \\ & y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Bazický přípustný bod

Je dána úloha

$$\left.\begin{array}{ll} \text{minimalizujte} & \langle x, c\rangle \\ \text{za podmínky} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array}\right\} \text{(LP)}$$

kde $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ a $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ splňuje

$$\text{hodn} A = \text{hodn}(A, b) = m \leq n.$$

Dále se v této sekci budeme držet následujícího značení:

- Přípustná množina $M = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax = b, x \geq 0\}$.
- $J(x) := \{j \in \{1, \ldots, n\} \,|\, x_j > 0\}$, kde $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$.
- $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^m$ sloupce matice A.
- Nechť $B \subseteq \{1, \ldots, n\}$ je neprázdná. Pak A_B je matice tvořená sloupci matice A s indexy v B (v daném pořadí). Je-li $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, pak x_B je sloupec tvořený prvky x_i, $i \in B$, v daném pořadí.
- $N := \{1, \ldots, n\} \setminus B$.

Bazický přípustný bod

Příklad

Je dána matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, vektor $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ a množina $B = \{1, 3\}$.

Potom

$$\begin{aligned} N &= \{2\}, \\ A_B &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \\ x_B &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \\ A_N &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ x_N &= \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bazický přípustný bod

Definice

Bod $x \in M$ se nazve ***bazický přípustný bod*** (zkráceně ***BPB***) úlohy (LP), pokud existuje m-prvková množina $B \subseteq \{1, \ldots, n\}$ taková, že

1. A_B je regulární;
2. $x_j = 0$ pro každé $j \in N$.

Množina B z definice BPB se nazývá ***přípustná báze***.

Příklad

Nechť $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ a $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

BPB jsou

- $(2, 0, 1)^T$ (přípustná báze je $B = \{1, 3\}$);
- $\frac{1}{2}(4, 3, 0)^T$ (přípustná báze je $B = \{1, 2\}$).

Bazický přípustný bod

Tvrzení

Nechť $x \in M$. Pak x je BPB právě tehdy, když $\{a_j \mid j \in J(x)\}$ je lineárně nezávislá množina.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Tvrzení

Pro každou m-prvkovou množinu $B \subseteq \{1, \ldots, n\}$ takovou, že A_B je regulární, existuje nejvýše jedno $x \in M$ splňující $x_j = 0$ pro každé $j \in N$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

- Různých BPB úlohy (LP) je nejvýše $\binom{n}{m}$.

Bazický přípustný bod

- Nechť x je BPB odpovídající množině $B \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Jeho komponenty x_i, $i \in B$, se nazývají ***bazické***. Komponenty x_i, $i \in N$, se nazývají ***nebazické***.
- Má-li BPB některé bazické komponenty nulové, pak přípustná báze B nemusí být určena jednoznačně.
- Nemá-li BPB jednoznačně určenou přípustnou bázi, říkáme, že je ***degenerovaný***.

Příklad

Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Potom

- $(1, 0, 0, 0)^T$ je degeneronaný BPB;
- $(0, 1, 1, 0)^T$ je nedegeneronaný BPB.

Bazický přípustný bod

Příklad

Nechť $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ a $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Již jsme ukázali, že BPB jsou $x = (2, 0, 1)^T$ a $y = \frac{1}{2}(4, 3, 0)^T$. Tyto body jsou také krajní body přípustné množiny

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, Ax = b, x \geq 0 \right\} = [x, y].$$

Je to náhoda?

Věta (O bazických přípustných bodech)

1. *Nechť $x \in M$. Pak x je BPB úlohy (LP) právě tehdy, když x je krajní bod množiny M.*
2. *M je neprázdná právě tehdy, když existuje BPB úlohy (LP).*

Důkaz: 1 viz přednáška. 2 vynecháváme. ■

Bazický přípustný bod

Věta (Základní věta lineárního programování)

1. *Úloha (LP) má řešení právě tehdy, když M je neprázdná a $\langle x, c \rangle$ je zdola omezená na M.*
2. *Má-li (LP) řešení, pak existuje řešení úlohy (LP), které je BPB.*

Důkaz: viz přednáška (jen pro M kompaktní). ■

Tvrzení

Množina všech řešení úlohy (LP) je konvexní polyedrická množina.

Důkaz: Viz přednáška. ■

- Je-li množina všech řešení úlohy (LP) neprázdná, pak je průnikem M a jisté nadroviny H (viz předchozí důkaz). Abychom určili H, potřebujeme znát jedno řešení (nebo alespoň hodnotu minima cílové funkce) úlohy (LP). Jak ho najít?

Simplexová metoda – motivace

Příklad

Je dána úloha

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte} \quad & -3x_1 - 2x_2 \\ \text{za podmínek} \quad & x_1 + x_2 \leq 4, \\ & 2x_1 + x_2 \leq 6, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Standardní tvar je

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte} \quad & -3x_1 - 2x_2 \\ \text{za podmínek} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 = 6, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Příklad (pokračování)

- Přípustnou bázi můžeme volit $B = \{3, 4\}$ a odpovídající BPB je $(0, 0, 4, 6)^T$.

$$
\begin{array}{rcl}
z & = & -3x_1 - 2x_2 \\
\hline
x_3 & = & 4 - x_1 - x_2 \\
x_4 & = & 6 - 2x_1 - x_2
\end{array}
$$

- Nyní chceme přejít k jinému BPB tak, aby hodnota cílové funkce klesla.
- Snížení hodnoty cílové funkce docílíme nenulovostí x_1 nebo x_2.
- Vyberme si například x_2. Její hodnotu můžeme zvýšit nejvýše na $\min\{4, 6\} = 4$. V přípustné bázi tak nahrazujeme 3 indexem 2.
- Nová přípustná báze bude $B = \{2, 4\}$.

Simplexová metoda – motivace

Příklad (pokračování)

$$
\begin{array}{rcl}
z & = & -8 - x_1 + 2x_3 \\
\hline
x_2 & = & 4 - x_1 - x_3 \\
x_4 & = & 2 - x_1 + x_3
\end{array}
$$

- Zvýšení x_1 (a nikoli x_3) povede ke snížení hodnoty cílové funkce.
- Komponentu x_1 můžeme zvýšit maximálně na $\min\{2, 4\} = 2$.
- Nová přípustná báze bude $B = \{1, 2\}$.

$$
\begin{array}{rcl}
z & = & -10 + x_3 + x_4 \\
\hline
x_2 & = & 2 - 2x_3 + x_4 \\
x_1 & = & 2 + x_3 - x_4
\end{array}
$$

- Zvýšení hodnoty x_3 nebo x_4 by vedlo ke zvýšení hodnoty cílové funkce.
- Řešení původní úlohy je bod $(2, 2)^T$.

Simplexová metoda

Předpokládejme, že existuje BPB úlohy (LP), tj. $M \neq \emptyset$.

Simplexový algoritmus

1. Nalezneme nějaký BPB $\hat{x}$ a odpovídající přípustnou bázi B.
2. Vypočteme
$$\widetilde{c}_j = c_j - c_B^T A_B^{-1} a_j = c_j - \left\langle A_B^{-1} a_j, c_B \right\rangle ,$$
$j \in \{1, \ldots, n\}$. (Stačí jen pro $j \in N$.)
3. Neexistuje-li $j \in N$ splňující $\widetilde{c}_j < 0$, pak algoritmus končí a $\hat{x}$ je řešení. V opačném případě přejdeme na bod 4.
4. Existuje-li $j \in N$ splňující $\widetilde{c}_j < 0$ a $A_B^{-1} a_j \leq 0$, pak algoritmus končí a úloha (LP) nemá řešení. V opačném případě přejdeme na bod 5.
5. Zvolíme $j \in N$ tak, že $\widetilde{c}_j < 0$.

Simplexový algoritmus – pokračování

6. Vybereme $l \in \{1, \dots, m\}$ tak, že $(A_B^{-1} a_j)_l > 0$ a
$$\frac{(A_B^{-1} b)_l}{(A_B^{-1} a_j)_l} = \min \left\{ \frac{(A_B^{-1} b)_i}{(A_B^{-1} a_j)_i} \,\middle|\, (A_B^{-1} a_j)_i > 0, i \in \{1, \dots, m\} \right\}.$$
7. Z $B = \{i_1, \dots, i_m\}$, kde $i_1 < \dots < i_m$, vypustíme i_l a vložíme do ní j (tj. nově je $B = (\{i_1, \dots, i_m\} \setminus \{i_l\}) \cup \{j\}$). Dále nalezneme BPB odpovídající této nové přípustné bázi B. Symbolem $\hat{x}$ nyní označíme tento BPB namísto předchozího BPB. Jdeme na bod 2.

Končí-li algoritmus v 4, pak směr, ve kterém je cílová funkce na M zdola neomezená, má souřadnice $d_i = \begin{cases} -(A_B^{-1} a_j)_i & i \in B, \\ 1 & i = j, \\ 0 & i \in N \setminus \{j\}. \end{cases}$

(Index j je určen v 4.)

Simplexová tabulka:

$$\begin{array}{c|c} c^T - c_B^T A_B^{-1} A & -\left\langle A_B^{-1} b, c_B \right\rangle \\ \hline A_B^{-1} A & A_B^{-1} b \end{array}$$

- Je-li BPB degenerovaný, může se simplexová metoda zacyklit.

Příklad

Je dána úloha

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte} \quad & -x_1 - 3x_2 \\ \text{za podmínek} \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ & -x_1 + x_2 + x_4 = 1, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Její (jediné) řešení je $(\frac{3}{5}, \frac{8}{5}, 0, 0)^T$.

Příklad

Je dána úloha

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte} \quad & -2x_2 - x_3 \\ \text{za podmínek} \quad & x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 7, \\ & -3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 3, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Tato úloha nemá řešení.

Dvoufázová simplexová metoda

- Není $M = \emptyset$?
- Jak najít počáteční BPB, pokud není hned vidět?
- Odpovědi na tyto otázky dává první (inicializační) fáze tzv. dvoufázové simplexové metody. Druhá fáze této metody je pak standardní simplexová metoda.
- ***Bez újmy na obecnosti budeme nyní předpokládat, že v úloze (LP) je $b \geq 0$.***

Jak probíhá první fáze? Řešme pomocnou úlohu

$$\left.\begin{array}{ll} \text{minimalizujte} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i \\ \text{za podmínky} & Ax + y = b, \\ & \qquad x, y \geq 0. \end{array}\right\} \text{(F1)}$$

Komponenty $y_1, \ldots, y_m$ vektoru y se nazývají umělé proměnné.

Dvoufázová simplexová metoda

- $(0, \dots, 0, b_1, \dots, b_m)^T$ je BPB úlohy (F1).
- Dle Základní věty lineárního programování má úloha (F1) vždy řešení, neboť přípustná množina je neprázdná a cílová funkce je zdola omezená (na přípustné množině).

Tvrzení

Přípustná množina M úlohy (LP) je neprázdná právě tehdy, když v bodě minima úlohy $(F1)$ má cílová funkce $\sum_{i=1}^m y_i$ hodnotu 0. V tomto případě musí být $y = 0$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

- Nalezneme-li simplexovou metodou řešení úlohy (F1), pak obsahuje nejvýše m kladných komponent (je to BPB úlohy (F1)).
- Vynecháme-li v řešení úlohy (F1) komponenty vektoru y, dostaneme BPB pro úlohu (LP).

Příklad

Je dána úloha

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte} \quad & x_2 \\ \text{za podmínek} \quad & x_1 = 1, \\ & x_1 - x_2 = 2, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Přípustná množina M je zřejmě prázdná. Ověřme to pomocí dvoufázové simplexové metody. První fáze vede na úlohu

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte} \quad & y_1 + y_2 \\ \text{za podmínek} \quad & x_1 + y_1 = 1, \\ & x_1 - x_2 + y_2 = 2, \\ & x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Ta má nenulové řešení, a proto je $M = \emptyset$.

Dvoufázová simplexová metoda

- Ne vždy je nutné zavádět všech m umělých proměnných, většinou jich stačí zavést méně.

Příklad

Je dána úloha

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte} \quad & 2x_1 \\ \text{za podmínek} \quad & x_1 - x_3 = 3, \\ & x_1 - x_2 - 2x_4 = 1, \\ & 2x_1 + x_4 + x_5 = 7, \\ & x_1, \ldots, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Pomocí dvoufázové simplexové metody nalezněme její řešení.

Příklad (Pokračování)

První fáze vede na úlohu

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte} \quad & y_1 + y_2 \\ \text{za podmínek} \quad & x_1 - x_3 + y_1 = 3, \\ & x_1 - x_2 - 2x_4 + y_2 = 1, \\ & 2x_1 + x_4 + x_5 = 7, \\ & x_1, \dots, x_5, y_1, y_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Jedno z řešení této úlohy je $(x_1, \dots, x_5, y_1, y_2) = (3, 0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$.

Bod $(3, 0, 0, 1, 0)^T$ je tak BPB původní úlohy. Z druhé fáze vidíme, že tento bod je také řešením původní úlohy.

Dvoufázová simplexová metoda

Příklad

Pomocí první fáze simplexové metody můžeme rozhodnout, zda má soustava $Ax = b$ nezáporné řešení.

1. Je-li
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$
pak nezáporné řešení soustavy $Ax = b$ je například $(0, 1, 0, 0)^T$.

2. Je-li
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$
pak nezáporné řešení soustavy $Ax = b$ neexistuje.

Tvrzení (Duální úloha lineárního programování)

Nechť $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}^n$ *a* $b \in \mathbb{R}^m$. *Duální úloha k úloze*

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{minimalizujte} & \langle x, c \rangle \\ \textit{za podmínky} & Ax \geq b, \\ & x \geq 0 \end{array}\right\} \textit{(P)}$$

je

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{maximalizujte} & \langle y, b \rangle \\ \textit{za podmínky} & A^T y \leq c, \\ & y \geq 0 \end{array}\right\} \textit{(D)}$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Dualita a lineární programování

Jak vypadá duální úloha k (D)?
Přepišme (D) na minimalizační úlohu:

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte} \quad & -\langle y, b\rangle \\ \text{za podmínek} \quad & A^T y \leq c, \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

Přepíšeme-li duální úlohu k této úloze na minimalizační, pak dostaneme úlohu (P)!

Věta (O silné dualitě pro lineární programování)

Úloha (P) má řešení právě tehdy, když má řešení úloha (D). V takovém případě jsou hodnoty obou úloh stejné.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Dualita a lineární programování

Nechť $I = \{1, \ldots, m\}$ a $J = \{1, \ldots, n\}$.
Konstrukce duální úlohy k obecné úloze lineárního programování:

primární/duální úloha	duální/primární úloha
minimalizujte $\langle x, c \rangle$	maximalizujte $\langle y, b \rangle$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \left\{ \begin{array}{c} \leq \\ \geq \\ = \end{array} \right\} b_i,\ i \in I$	$y_i \left\{ \begin{array}{c} \leq 0 \\ \geq 0 \\ \in \mathbb{R} \end{array} \right\},\ i \in I$
$x_j \left\{ \begin{array}{c} \geq 0 \\ \leq 0 \\ \in \mathbb{R} \end{array} \right\},\ j \in J$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \left\{ \begin{array}{c} \leq \\ \geq \\ = \end{array} \right\} c_j,\ j \in J$

Dualita a lineární programování

Příklad

Je dána úloha

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte} \quad & 3x_1 - 2x_2 + 5x_4 \\ \text{za podmínek} \quad & x_1 + x_3 \leq 2, \\ & 2x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = 8, \\ & -3x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 \geq -1, \\ & x_1 \in \mathbb{R}, \\ & x_2, x_3 \geq 0, \\ & x_4 \leq 0. \end{aligned}$$

Zkonstruujme úlohu k ní duální.

Příklad (pokračování)

Duální úloha je

$$
\begin{aligned}
\text{maximalizujte} \quad & 2y_1 + 8y_2 - y_3 \\
\text{za podmínek} \quad & y_1 + 2y_2 - 3y_3 = 3, \\
& -y_2 + y_3 \leq -2, \\
& y_1 - y_2 + 5y_3 \leq 0 \\
& 4y_2 - y_3 \geq 5, \\
& y_1 \leq 0, \\
& y_2 \in \mathbb{R}, \\
& y_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Simplexová metoda a řešení duální úlohy

Do úlohy (P) zaveďme doplňkové proměnné $y = (y_1, \ldots, y_m)^T$. Tím dostaneme úlohu

$$\left.\begin{array}{ll} \text{minimalizujte} & \langle x, c\rangle \\ \text{za podmínek} & Ax - y = b, \\ & \quad\quad\; x, y \geq 0 \end{array}\right\} (\widetilde{\mathrm{P}})$$

Po provedení simplexové metody dostaneme výslednou simplexovou tabulku ve tvaru

$$\begin{array}{cccccc|c} \widetilde{c}_1 & \ldots & \widetilde{c}_n & \widetilde{c}_{n+1} & \ldots & \widetilde{c}_{n+m} & \ldots \\ \hline \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \end{array}$$

kde $\widetilde{c}_1, \ldots, \widetilde{c}_{m+n} \geq 0$ a sloupce na levé straně odpovídají postupně proměnným $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$. Pak $\hat{y} = (\widetilde{c}_{n+1}, \ldots, \widetilde{c}_{n+m})^T$ je řešením úlohy (D).

Simplexová metoda a řešení duální úlohy

Příklad

Je dána dvojice vzájemně duálních úloh

$$\begin{array}{llcll} \text{minimalizujte} & \langle x, c\rangle & \qquad & \text{maximalizujte} & \langle y, b\rangle \\ \text{za podmínek} & Ax \geq b & & \text{za podmínek} & A^T y \leq c \\ & x \geq 0 & & & y \geq 0, \end{array}$$

kde $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

- Řešení minimalizační úlohy je $\hat{x} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Řešení maximalizační úlohy je $\hat{y} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Simplexová metoda a řešení duální úlohy

Příklad

Je dána dvojice vzájemně duálních úloh

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte} && \langle x, c\rangle && \text{maximalizujte} && \langle y, b\rangle \\ &\text{za podmínek} && Ax \geq b && \text{za podmínek} && A^T y \leq c \\ & && x \geq 0 && && y \geq 0, \end{aligned}$$

kde $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$.

- Řešení ani jedné z úloh neexistuje.