Optimalizace a teorie her

Kvadratické programování

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
bohata@math.feld.cvut.cz

Úvod do kvadratického programování

Úlohy kvadratického programování jsou optimalizační úlohy, ve kterých je

1. cílová funkce f je kvadratická, tj.

   $$f(x) = \langle Qx, x\rangle + \langle x, c\rangle + d,$$

   kde $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}$ (bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že Q je symetrická a $d = 0$);
2. přípustná množina je konvexní polyedrická množina.

Úloha kvadratického programování není obecně konvexní!

- Pokud ale minimalizujeme kvadratickou funkci f, ve které je Q pozitivně semidefinitní matice, pak se jedná o konvexní úlohu.

Úvod do kvadratického programování

V dalším budeme uvažovat jen úlohu kvadratického programování ve tvaru

$$\left.\begin{array}{ll} \text{minimalizujte} & \frac{1}{2}\langle Qx, x\rangle + \langle x, c\rangle \\ \text{za podmínky} & Ax \leq b, \end{array}\right\} (QP)$$

kde $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ je pozitivně definitní, $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$ a $c \in \mathbb{R}^n$.

- Cílová funkce v (QP) je ryze konvexní. Úloha tak má nejvýše jedno řešení.
- KKT podmínky

$$\begin{aligned} Qx + c + A^T\mu &= 0 \\ \langle Ax - b, \mu\rangle &= 0 \\ \mu &\geq 0 \end{aligned}$$

jsou nutné a postačující.

Metoda aktivní množiny – motivace

- $a_1, \ldots, a_m$ ... sloupce matice A^T.
- $M = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax \leq b\}$ ... přípustná množina úlohy (QP).
- Pro $x \in M$ označíme symbolem $I(x) = \{i \in \{1, \ldots, m\} \,|\, \langle a_i, x \rangle = b_i\}$ indexovou množinu aktivních omezení.
- Pokud bychom znali indexovou množinu aktivních omezení v bodě $\hat{x}$ řešení úlohy (QP), pak $\hat{x}$ snadno zrekonstruujeme z KKT podmínek. Bod $\hat{x}$ by byl řešením soustavy

$$\begin{aligned} Qx + c + \sum_{j \in I(\hat{x})} \mu_j a_j &= 0 \\ \langle a_j, x \rangle - b_j &= 0 \quad \text{pro } j \in I(\hat{x}) \\ \langle a_j, x \rangle - b_j &< 0 \quad \text{pro } j \notin I(\hat{x}) \\ \mu_j &\geq 0 \quad \text{pro } j \in I(\hat{x}) \end{aligned}$$

Metoda aktivní množiny – motivace

- Idea algoritmu pro řešení (QP) spočívá v řešení posloupnosti úloh

$$\left.\begin{array}{lll} \text{minimalizujte} & \frac{1}{2}\langle Qx, x\rangle + \langle x, c\rangle & \\ \text{za podmínek} & \langle a_j, x\rangle = b_j & \text{pro } j \in J_k \end{array}\right\} (P_k)$$

  s vhodnými indexovými množinami $J_k \subseteq \{1, \ldots, m\}$.
- V dalším předpokládáme, že $\{a_i \,|\, i \in J_k\}$ tvoří lineárně nezávislou množinu.
- Bod $\hat{x}^{[k]} \in \mathbb{R}^n$ je řešením úlohy (P_k) právě tehdy, když existují čísla $\mu_j \in \mathbb{R}$, kde $j \in J_k$, splňující

$$\begin{aligned} Q\hat{x}^{[k]} + c + \sum_{j \in J_k} \mu_j a_j &= 0 \\ \left\langle a_j, \hat{x}^{[k]} \right\rangle - b_j &= 0 \quad \text{pro } j \in J_k \end{aligned}$$

Metoda aktivní množiny – motivace

Příklad

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte} \quad & \frac{1}{2}\left[(x_1-1)^2+x_2^2\right] \\ \text{za podmínek} \quad & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

1. Položme $x^{[0]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $J_0 = I(x^{[0]}) = \{1\}$.
2. Řešení úlohy (P_0) je $\hat{x}^{[0]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in M$. Tomuto bodu odpovídá $\mu_1 < 0$. Proto položíme $x^{[1]} = \hat{x}^{[0]}$ a $J_1 = I(x^{[1]}) \setminus \{1\} = \{2\}$.
3. Řešení úlohy (P_1) je $\hat{x}^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bod $\hat{x}^{[1]}$ je řešením zadané úlohy.

Metoda aktivní množiny – motivace

Příklad

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte} \quad & \frac{1}{2}\left[(x_1+1)^2+(x_2+1)^2\right] \\ \text{za podmínek} \quad & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

1. Položme $x^{[0]} := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $J_0 := I(x^{[0]}) = \emptyset$.
2. Řešení úlohy (P_0) je $\hat{x}^{[0]} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin M$. Ať $d_0 = \hat{x}^{[0]} - x^{[0]}$ a

$$\alpha = \min\left\{-\frac{\left\langle a_1, x^{[0]}\right\rangle}{\langle a_1, d_0\rangle}, -\frac{\left\langle a_2, x^{[0]}\right\rangle}{\langle a_2, d_0\rangle}\right\} = \frac{1}{2}.$$

Položme $x^{[1]} = x^{[0]} + \alpha d_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in M$ a $J_1 = I(x^{[1]}) = \{2\}$.

Metoda aktivní množiny – motivace

Příklad (pokračování)

3. Řešení úlohy (P_1) je $\hat{x}^{[1]} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin M$. Ať $d_1 = \hat{x}^{[1]} - x^{[1]}$ a

$$\alpha = -\frac{\left\langle a_1, x^{[1]} \right\rangle}{\langle a_1, d_1 \rangle} = \frac{1}{2}.$$

Potom $x^{[2]} = x^{[1]} + \alpha d_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in M$ je řešení zadané úlohy.

Metoda aktivní množiny

Algoritmus

1. Zvol $x^{[0]} \in M$, polož $J_0 = I(x^{[0]})$ a $k = 0$.
2. Urči řešení $\hat{x}^{[k]}$ úlohy (P_k) a multiplikátory μ_j, kde $j \in J_k$.
3. Je-li $\hat{x}^{[k]} \in M$ a $\mu_j \geq 0$ pro každé $j \in J_k$, pak $\hat{x}^{[k]}$ je řešení úlohy a algoritmus končí. V opačném případě jdi na bod 4.
4. Je-li $\hat{x}^{[k]} \in M$ a existuje $l \in J_k$ tak, že $\mu_l < 0$, pak polož $x^{[k+1]} = \hat{x}^{[k]}$, $J_{k+1} = I(x^{[k+1]}) \setminus \{l\}$, zvedni hodnotu k o jedna a jdi na bod 2. V opačném případě jdi na bod 5.
5. Polož $d_k = \hat{x}^{[k]} - x^{[k]}$,
$$\alpha = \min \left\{ \frac{b_i - \left\langle a_j, x^{[k]} \right\rangle}{\langle a_j, d_k \rangle} \,\middle|\, j \notin J_k, \langle a_j, d_k \rangle > 0 \right\},$$
$x^{k+1} = x^k + \alpha d_k$, $J_{k+1} = I(x^{[k+1]})$, zvedni hodnotu k o jedna a jdi na bod 2.

Metoda aktivní množiny

Příklad

Řešení úlohy

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte} \quad & \frac{1}{2}\left[(x_1+1)^2+(x_2+1)^2\right] \\ \text{za podmínek} \quad & x_1+x_2 \geq 2, \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_2 \leq 4. \end{aligned}$$

je bod $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

Dualita v kvadratickém programování

Tvrzení (Duální úloha kvadratického programovnání)

Duální úloha k úloze (QP) je

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{maximalizujte} & -\dfrac{1}{2}\langle By, y\rangle - \langle y, v\rangle - \dfrac{1}{2}\left\langle Q^{-1}c, c\right\rangle \\ \textit{za podmínky} & y \geq 0, \end{array}\right\} (DQP)$$

kde $B = AQ^{-1}A^T$ *a* $v = AQ^{-1}c + b$*.*

Důkaz: Viz přednáška. ■

Věta (O silné dualitě pro kvadratické programování)

Úloha (QP) má řešení právě tehdy, když (DQP) má řešení. Má-li (QP) řešení, pak se hodnoty obou úloh rovnají.

Důkaz: Vynecháváme. ■