

Konvexní množiny

Zadání

1. Ať $x, y \in \mathbb{R}^n$ jsou dva různé body. Z definice ukažte, že přímka

$$L = \{\alpha x + (1 - \alpha)y \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

procházející těmito body je konvexní množina.

2. Ukažte, že množina $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní mnohostěn a navíc tento mnohostěn načrtněte v případě $n = 2$, jestliže

- (a) $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1\}$;
- (b) $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i| \leq 1\}$.

3. Ať C_1, C_2 jsou konvexní množiny v $\mathbb{R}^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Ukažte, že

- (a) $C_1 + C_2 = \{x + y \mid x \in C_1, y \in C_2\}$ je konvexní množina;
- (b) $\alpha C_1 = \{\alpha x \mid x \in C_1\}$ je konvexní množina.

4. Napište konvexní obal množiny $M = \{(0, 0)^T, (0, 2)^T, (1, 1)^T, (2, 1)^T\}$ jako průnik tří polorovin.

5. Necht' M a N jsou dvě množiny v $\mathbb{R}^n$. Ukažte, že

- (a) $M \subseteq \text{conv}(M)$;
- (b) jestliže $M \subseteq N$, potom $\text{conv}(M) \subseteq \text{conv}(N)$;
- (c) $\text{conv}(\text{conv}(M)) = \text{conv}(M)$;
- (d) $\text{conv}(M + N) = \text{conv}(M) + \text{conv}(N)$.

6. Necht' M a N jsou dvě množiny v $\mathbb{R}^n$. Ukažte, že

$$\text{conv}(M \cap N) \subseteq \text{conv}(M) \cap \text{conv}(N).$$

Je $\text{conv}(M \cap N) = \text{conv}(M) \cap \text{conv}(N)$? Pokud ne, nalezněte protipříklad.

7. Nalezněte $\text{conv}(\{(1, 1)^T, (1, 2)^T\}) + \text{conv}(\{(2, 1)^T, (3, 2)^T\})$. Nakreslete tuto množinu v rovině a popište ji jako průnik nejvýše čtyř polorovin.

8. Je dána matice $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Ať $L = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$.

- (a) Ukažte, že A má lineárně nezávislé sloupce právě tehdy, když $A^T A$ je invertibilní.
- (b) Ukažte, že má-li A lineárně nezávislé sloupce, pak $P_L(x) = A(A^T A)^{-1} A^T x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$.
- (c) Ukažte, že má-li matice A sloupce $a_1, \dots, a_n$, které jsou nenulové a vzájemně ortogonální, pak

$$P_L(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\langle x, a_i \rangle}{\|a_i\|^2} a_i.$$

9. Necht' $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ a $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle = b\}$. Ukažte, že

$$P_C(x) = x - \frac{\langle x, y \rangle - b}{\|y\|^2} y.$$

10. Ať $C = \mathbb{R}_+^n$. Ukažte, že $P_C(x) = x^+$, kde $x^+ \in \mathbb{R}_+^n$ je vektor o komponentách $x_i^+ = \max\{0, x_i\}$ ($i = 1, \dots, n$).
11. Jsou dány body $a = (-2, -1)^T, b = (-1, -2)^T, c = (0, 0)^T, d = (1, 2)^T$. Metodou nejmenších čtverců proložte těmito body graf
- (a) afinní funkce $f(x) = \alpha x + \beta$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
- (b) funkce $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, kde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
12. Při působení síly velikosti F má pružina délku L . Naměřené hodnoty délky pružiny v závislosti na velikosti působící síly jsou uvedeny v tabulce.

F [N]	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
L [cm]	4,9	6,7	8,4	9,2	10,7	12,2	13,5	15,9	16,8

Předpokládejte, že délka pružiny se řídí Hookovým zákonem ve tvaru $L = a + bF$, kde a je délka pružiny bez zatížení a b je převrácená hodnota tuhosti pružiny. Metodou nejmenších čtverců naleznete koeficienty a a b . (K výpočtu využijte vhodný software.)

13. Jsou dány body $(x, y)^T$ v rovině, jejichž souřadnice jsou uvedeny v tabulce.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
y	0,33	0,60	0,82	0,75	1,16	1,36	1,41	1,67	1,75
x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
y	2,07	2,07	2,34	2,32	2,72	2,75	2,88	2,89	3,09
x	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7
y	3,32	3,12	3,29	3,16	3,29	3,08	3,10	3,13	3,02

S využitím vhodného softwaru naleznete pomocí metody nejmenších čtverců neznámé parametry ve funkci $f(x)$ (a tuto funkci vykreslete do společného grafu se zadanými body), která je matematickým modelem závislosti y na x , jestliže

- (a) $f(x) = a_1 x + a_0$;
- (b) $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$;
- (c) $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$;
- (d) $f(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$;
- (e) $f(x) = a_0 + a_1 \sin x + a_2 \cos x$.

14. Vysílač vysílá v časovém rozmezí 1 až 3 časové jednotky diskretní signál $(2, 4, 3)^T$. Signál se dostane do přijímače po dvou drahách L_1 a L_2 s časovým spožděním. Od vysílače k přijímači se signál dostane po L_1 za 10 časových jednotek a po L_2 za 12 časových jednotek. Signál měřený přijímačem v časovém rozmezí 10 až 14 časových jednotek je $(1, 3, 3, 2, 1)^T$. Předpokládejte, že přijímač bude signál šířící se po dráze L_i ($i = 1, 2$) detekovat utlumený ve tvaru $a_i(2, 4, 3)$, kde $a_i \in \{0, 1\}$ je koeficient útlumu signálu na dráze L_i . Metodou nejmenších čtverců najděte koeficienty a_1 a a_2 .
15. Ať $w_1, \dots, w_m$ jsou kladná reálná čísla a $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ má řádky $a_1, \dots, a_m$. Je dána úloha (váhovaných nejmenších čtverců) minimalizujte funkci $f(x) = \sum_{i=1}^m w_i (\langle a_i^T, x \rangle - b_i)^2$ na $\mathbb{R}^n$.
- (a) Formulujte uvedenou úlohu jako obyčejnou úlohu nejmenších čtverců (tj. najděte $B \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ a $c \in \mathbb{R}^m$ tak, aby $f(x) = \|Bx - c\|^2$).
- (b) Ukažte, že má-li A lineárně nezávislé sloupce, potom jediné řešení uvedené optimalizační úlohy je $\hat{x} = (A^T W A)^{-1} A^T W b$, kde W je diagonální matice $\text{diag}(w_1, \dots, w_m)$.
16. Měřením bylo zjištěno prvních 20 koeficientů diskretního signálu $(y_n)_{n=0}^\infty$, které jsou uvedeny v tabulce.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_n	1,84	0,29	0,78	2,00	0,42	0,46	2,00	0,80	0,31	1,80
n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
y_n	0,95	0,35	1,54	1,15	0,36	1,32	1,38	0,35	1,21	1,37

S využitím vhodného softwaru najděte pomocí metody nejmenších čtverců neznámé parametry matematického modelu pro predikci koeficientů signálu, jestliže

- (a) $y_n = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + a_3 y_{n-3}$ pro $n \geq 3$;
- (b) $y_n = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + a_3 y_{n-3} + a_4 y_{n-4} + a_5 y_{n-5}$ pro $n \geq 5$.

Kromě toho vykreslete v obou případech členy y_n pro $n \leq 100$ a diskutujte rozdíl ve výsledcích uvedených dvou modelů.

17. Ať závislost výstupního signálu $(y_n)_{n=0}^\infty$ systému na vstupním signálu $(x_n)_{n=0}^\infty$ je dána konvolucí posloupností $(x_n)_{n=0}^\infty$ s posloupností $(h_n)_{n=0}^\infty$ ($(h_n)_{n=0}^\infty$ popisuje odezvu systému na jednotkový impuls), tj. $y_n = \sum_{i=0}^n h_i x_{n-i}$. Předpokládejte dále, že $h_n = 0$ pro všechna $n \geq 4$. Měřením byla zjištěna hodnota koeficientů $y_0, \dots, y_{20}$ výstupního signálu, když na vstupu byl signál s počátečními koeficienty $x_0, \dots, x_{20}$. Formulujte úlohu nejmenších čtverců pro nalezení koeficientů h_0, h_1, h_2, h_3 .

Výsledky

4. $\text{conv}(M) = C_1 \cap C_2 \cap C_3$, kde $C_i = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, v_i \rangle \leq \alpha_i\}$, $v_1 = (-1, 0)^T$, $v_2 = (1, -2)^T$, $v_3 = (1, 2)^T$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ a $\alpha_3 = 4$.
6. Pro $M = \{0, 2\}$, $N = \{1, 3\}$ je
- $$\emptyset = \text{conv}(M \cap N) \neq \text{conv}(M) \cap \text{conv}(N) = [1, 2].$$
7. $\text{conv}(M) = C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4$, kde $C_i = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, v_i \rangle \leq \alpha_i\}$, $v_1 = (-1, 0)^T$, $v_2 = (1, -1)^T$, $v_3 = (-1, 1)^T$, $v_4 = (1, 0)^T$, $\alpha_1 = -3$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 4$.
11. (a) $\alpha = \frac{11}{10}$, $\beta = \frac{3}{10}$;
(b) $\alpha = \frac{3}{4}$, $\beta = \frac{37}{20}$, $\gamma = -\frac{9}{20}$.
12. $a \approx 5,03 \text{ cm}$ a $b \approx 2,95 \text{ cm/N}$.
13. (a) $a_1 \approx 1,13$, $a_0 \approx 0,7$;
(b) $a_2 \approx -0,55$, $a_1 \approx 2,68$, $a_0 \approx -0,05$;
(c) $a_3 \approx -0,22$, $a_2 \approx 0,37$, $a_1 \approx 1,63$, $a_0 \approx 0,21$;
(d) $a_4 \approx 0,01$, $a_3 \approx -0,29$, $a_2 \approx 0,50$, $a_1 \approx 1,54$, $a_0 \approx 0,23$;
(e) $a_2 \approx -1,13$, $a_1 \approx 1,47$, $a_0 \approx 1,37$.
14. $a_1 = \frac{113}{161} \approx 0,7$, $a_2 = \frac{71}{161} \approx 0,44$.
15. (a) minimalizujte $f(x) = \left\| W^{\frac{1}{2}}Ax - W^{\frac{1}{2}}b \right\|^2$, kde $W = \text{diag}(w_1, \dots, w_n)$.
16. (a) $a_1 \approx 0,18$, $a_2 \approx -0,14$, $a_3 \approx 0,96$;
(b) $a_1 \approx -0,37$, $a_2 \approx -0,35$, $a_3 \approx 0,91$, $a_4 \approx 0,49$, $a_5 \approx 0,31$.
17. Minimalizujte $f(x) = \|Ax - b\|^2$, kde A je matice s řádky $a_1 = (x_0, 0, 0, 0)$, $a_2 = (x_1, x_0, 0, 0)$, $\dots$, $a_{20} = (x_{20}, x_{19}, x_{18}, x_{17})$ a $b = (y_0, \dots, y_{20})^T$.