

Matematická analýza 2

Písemná část zkoušky (XX.XX.XXXX)

Jméno a příjmení:

Podpis:

Příklad	1.	2.	3.	4.	5.	Σ
Body						

Před zahájením práce

- Vyplňte čitelně rubriku Jméno a příjmení a podepište se.
- Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, psací potřeby, průkaz totožnosti a papíry, na které zkoušku vypracováváte.
- Nepište obyčejnou tužkou ani červeně, jinak písemka nebude přijata.
- Na konci každého příkladu formulujte odpověď.
- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**

Soupis vybraných vzorců

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Jakobián transformace do polárních souřadnic: r .
- Jakobián transformace do válcových souřadnic: r .
- Jakobián transformace do sférických souřadnic: $r^2 \sin \theta$.

Zadání A

1. [12 bodů] Je dána funkce

$$f(x, y) = \sqrt{1 + 2x} \cos(x + 2y).$$

Nalezněte Taylorův polynom druhého řádu funkce f v bodě $(0, 0)$. Tento výsledek využijte k aproximaci hodnoty $f\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$.

2. [12 bodů] Nalezněte všechny body na křivce o rovnici

$$(x + y)^2 + 4(x - y)^2 = 16,$$

které jsou nejbližší počátku.

3. [12 bodů] Vypočtete integrál funkce $f(x, y, z) = z^2$ přes množinu

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + 4z \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

4. [12 bodů] Je dána plocha

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \in [-2, 2], z \geq 0\}.$$

Pomocí Stokesovy věty vypočtete křivkový integrál vektorového pole

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x - y^3z, \sin(y^2), xy^3 + e^z)$$

přes křivku C , kde C je okraj plochy S orientovaný proti směru hodinových ručiček, díváme-li se na něj shora.

5. [4 body] Je dána množina

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \max\{|x|, |y|\} < 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x^2 + 2x\}.$$

U každého z bodů $\mathbf{a} = (0, 0)$, $\mathbf{b} = (2, 0)$ rozhodněte, zda se jedná o

- (a) hromadný bod M ;
- (b) izolovaný bod M .

6. [4 body] Ať $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je dáno předpisem $\Phi(x, y) = (2x, y)$. Nalezněte nej-
obecnější tvar vektorového pole $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ třídy C^1 tak, aby $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ a
 $\nabla \cdot (\mathbf{F} \circ \Phi) = 0$ na $\mathbb{R}^2$.

7. [4 body] Je dána spojitá funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a množina

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 1\}.$$

V integrálu

$$\int_{\Omega} f(x, y) \, d\lambda_2(x, y)$$

proved'te substituci $u = x$ a $v = 2y$.

Zadání B

1. [12 bodů] Je dáno vektorové pole

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x - \alpha z e^{2x}, 3y^2, z^2 - e^{2x}),$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (a) Určete všechny hodnoty parametru α , pro které je vektorové pole $\mathbf{F}$ potenciálové.
- (b) Pro hodnoty parametru α z bodu (a) nalezněte potenciál f vektorového pole $\mathbf{F}$ tak, aby $f(0, 0, 1) = 0$.
- (c) Pro hodnoty parametru α z bodu (a) vypočtěte křivkový integrál vektorového pole $\mathbf{F}$ podél kružnice $C = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - 1)^2 + y^2 = 1\}$ orientované proti směru hodinových ručiček, díváme-li se na ní shora.

2. [12 bodů] Jsou dány body $\mathbf{u} = (-2, -1)$, $\mathbf{v} = (0, 1)$ a $\mathbf{w} = (2, 2)$.

- (a) Formulujte úlohu o proložení přímky body $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ metodou nejmenších čtverců (tj. uveďte, zda hledáte body minima nebo maxima funkce f na M a specifikujte funkci f a množinu M).
- (b) Vyřešte úlohu z bodu (a).

3. [12 bodů] Vypočtěte integrál funkce $f(x, y) = y$ přes kompaktní množinu $M \subseteq \mathbb{R}^2$ ohraničenou křivkami $y = x^2 + 1$ a $y = 3 - x^2$.

4. [12 bodů] Ať kompaktní množina M je částí kuželu $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ ležící mezi rovinami $z = 1$ a $z = 2$. Pomocí Gaussovy věty vypočtěte plošný integrál vektorového pole

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2, x^2y, e^x - \cos y)$$

přes plochu $S = \partial M$ orientovanou vnějším normálovým polem.

5. [4 body] Je dána množina

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \|(x, y) - (1, -1)\| \leq 2\}.$$

Načrtněte M a dále nalezněte vnitřek a hranici množiny M .

6. [4 body] Ať $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je třídy C^2 a její Taylorův polynom druhého řádu v bodě $\mathbf{a} = (1, 0)$ je

$$T_2(x, y) = 3 + 2(x - 1)^2 + (x - 1)y + y^2.$$

Rozhodněte, zda $\mathbf{a}$ je bod lokálního extrému a v kladném případě určete typ tohoto extrému.

7. [4 body] Periodická funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je součtem Fourierovy řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)t)}{n^2+1}.$$

Určete (základní) periodu T funkce f a dále nalezněte integrály $\int_0^T f(t) \sin(3t) dt$ a $\int_0^T f(t) \cos(t) dt$.

Zadání C

1. [12 bodů] Je dána funkce

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 - x + 2y.$$

(a) Nalezněte bod $\mathbf{a}$ náležící grafu funkce f , ve kterém je tečná rovina rovnoběžná s rovinou $2x - 3y + z = 6$.

(b) Nalezněte všechny jednotkové vektory $\mathbf{h}$ tak, aby $\nabla_{\mathbf{h}} f(0, 0) = \mathbf{0}$.

2. [12 bodů] Klasifikujte všechny stacionární body funkce

$$f(x, y) = 4x^2 - 2x^3 - x^2y + \frac{1}{2}y^2.$$

3. [12 bodů] Vypočtěte integrál funkce $f(x, y, z) = z$ přes kompaktní množinu $M \subseteq \mathbb{R}^3$, která je ohraničené plochami $x = 0$, $y = x^3$, $y = 8$, $z = 0$ a $z = 1$.

4. [12 bodů] Pomocí Greenovy věty vypočtěte křivkový integrál vektorového pole

$$\mathbf{F}(x, y) = (-y^3 + \sin x, 3e^y + x^2)$$

podél kladně orientované Jordanovy křivky C , která je hranicí množiny

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, -y \leq x \leq y\}.$$

5. [4 body] Rozhodněte, zda lze funkci $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ dodefinovat v bodě $\mathbf{a} = (0, 0)$ spojitě. V kladném případě určete hodnotu spojitěho rozšíření funkce f v bodě $\mathbf{a} = (0, 0)$.

6. [4 body] Je dána křivka

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 = 1, y = x + z\}.$$

(a) Nalezněte nějakou parametrizaci C .

(b) Určete jednotkový tečný vektor $\boldsymbol{\tau}$ v bodě $\mathbf{a} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

7. [4 body] Ať $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$ a $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$.

(a) Vypočtěte $\int_C \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{s}$, kde C má parametrizaci $\varphi(t) = (2t - 1, t^2 + t)$, $t \in [0, 1]$.

(b) Nalezněte jednotkový vektor $\mathbf{h}$ udávající směr největšího růstu funkce $f(x, y)$ v bodě $\mathbf{a} = (1, -1)$.

Zadání D

1. [12 bodů] Je dána funkce

$$f(x, y) = \ln(xy) + e^{x-2y+1}.$$

Nalezněte Taylorův polynom druhého řádu funkce f v bodě $(1, 1)$. Tento výsledek využijte k aproximaci hodnoty $f\left(\frac{9}{10}, \frac{11}{10}\right)$.

2. [12 bodů] Nalezněte všechny body minima a body maxima funkce

$$f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x$$

na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 16\}$.

3. [12 bodů] Vypočtete integrál funkce $f(x, y, z) = y$ přes množinu

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

4. [12 bodů] Pomocí Greenovy věty určete obsah množiny $M \subseteq \mathbb{R}^2$, jestliže víte, že hranice M je Jordanova křivka s parametrizací

$$\varphi(t) = (t^2 - t, t^3 - t), \quad t \in [0, 1].$$

5. [4 body] Ukažte, že neexistuje limita funkce

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

v bodě $(0, 0)$.

6. [4 body] Je dána regulární plocha

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \cos z, \sin z \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2\pi\}.$$

(a) Nalezněte nějakou její parametrizaci.

(b) Nalezněte jednotkový normálový vektor $\boldsymbol{\nu}$ k S v bodě $\boldsymbol{a} = (\frac{1}{2}, 1, \frac{\pi}{3})$, který má kladnou první komponentu.

7. [4 body] Je dána množina $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. V integrálu

$$\int_{\Omega} f(x, y) \, d\lambda_2(x, y)$$

proved'te substituci $u = y - x$ a $v = y$ a výsledný integrál napište jako dvojnásobný integrál, kde vnitřní integrace bude přes proměnnou u .

Zadání E

1. [12 bodů] Je dáno vektorové pole

$$\mathbf{F}(x, y) = (g(y) \sin x, 2y - \cos x),$$

kde $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce třídy C^1 .

- (a) Určete všechny možné funkce g tak, aby vektorové pole $\mathbf{F}$ bylo potenciálové (na $\mathbb{R}^2$).
- (b) Pro funkci g z bodu (a) splňující $g(0) = 0$ nalezněte potenciál f vektorového pole $\mathbf{F}$ tak, aby $f(0, 2) = 0$.

2. [12 bodů] Klasifikujte všechny stacionární body funkce

$$f(x, y, z) = x^2 + \frac{1}{4}y^4 + 2z^2 - y^2(2z - 1) - 2x + z.$$

3. [12 bodů] Záměnou pořadí integrace spočtěte

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{\frac{y}{2}}} e^{-x^3+3x} dx dy + \int_1^2 \int_{\sqrt{y-1}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} e^{-x^3+3x} dx dy.$$

4. [12 bodů] Ať křivka C je průnik kružnice $x^2 + y^2 = 4$ s polorovinou $x \geq 0$.

- (a) Nalezněte nějakou parametrizaci křivky C .
- (b) Vypočtěte křivkový integrál funkce $f(x, y) = x^2 + y$ podél křivky C .

5. [4 body] Načrtněte definiční obor a hladinu výšky 0 funkce $f(x, y) = \ln\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)$.

6. [4 body] Ať $f(x, y) = \sin(x^2 - y)$, $\mathbf{a} = (0, 0)$ a $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je vektorová funkce taková, že $J_{\mathbf{g}}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{g}(\mathbf{a}) = (-1, 1)$.

- (a) Určete diferenciál funkce $f \circ \mathbf{g}$ v bodě $\mathbf{a}$.
- (b) Nalezněte směrovou derivaci $f \circ \mathbf{g}$ v bodě $\mathbf{a}$ podle vektoru $\mathbf{v} = (1, 2)$.

7. [4 body] Je dána funkce $f(t) = t^2$, $t \in [0, 2]$.

- (a) Napište Fourierovu řadu funkce f . Koeficienty ve Fourierově řadě nepočítejte, pouze pro ně uveďte konkrétní vztahy pro jejich výpočet (tj. dosaďte do obecných vztahů dle zadání příkladu).
- (b) Nalezněte součet Fourierovy řady funkce f v bodech 0 a 9.

Stručné řešení

Zadání A

1. Snadno nalezneme, že

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= \left(\frac{\cos(x+2y)}{\sqrt{1+2x}} - \sqrt{1+2x} \sin(x+2y), -2\sqrt{1+2x} \sin(x+2y) \right), \\ H_f(x, y) &= \begin{pmatrix} -\frac{2(1+x)\cos(x+2y)}{\sqrt{(1+2x)^3}} - \frac{2\sin(x+2y)}{\sqrt{1+2x}} & -\frac{2\sin(x+2y)+2(1+2x)\cos(x+2y)}{\sqrt{1+2x}} \\ -\frac{2\sin(x+2y)+2(1+2x)\cos(x+2y)}{\sqrt{1+2x}} & -4\sqrt{1+2x}\cos(x+2y) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Odtud plyne, že Taylorův polynom druhého řádu funkce f v bodě $(0, 0)$ je

$$\begin{aligned}T_2(x, y) &= f(0, 0) + \nabla f(0, 0) \cdot (x, y) + \frac{1}{2}(x, y)H_f(0, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= 1 + (1, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x, y) \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= 1 + x - x^2 - 2xy - 2y^2.\end{aligned}$$

Proto

$$f\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right) \approx T_2\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right) = 1 + \frac{1}{20}.$$

2. Hledáme bod minima spojitě funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ na množině

$$M = \{(x, y) \mid (x+y)^2 + 4(x-y)^2 = 16\}.$$

Množina M je neprázdná a kompaktní, a proto řešení existuje. Bod minima nalezneme pomocí metody Lagrangeových multiplikátorů. Jestliže (x, y) je bod minima, potom existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ tak, že

$$x + \lambda(5x - 3y) = 0, \quad (1)$$

$$y + \lambda(-3x + 5y) = 0, \quad (2)$$

$$(x+y)^2 + 4(x-y)^2 = 16. \quad (3)$$

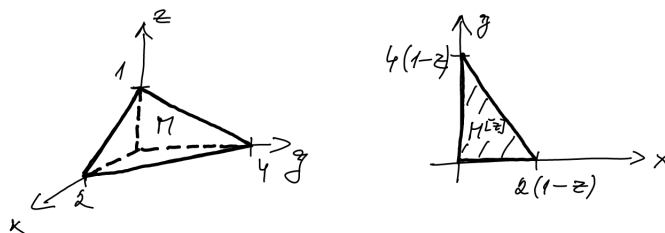
Odečtením (2) od (1) dostaneme $(x-y)(1+8\lambda) = 0$. Proto $x = y$ nebo $\lambda = -\frac{1}{8}$.

- Je-li $x = y$, pak z (3) plyne, že $4x^2 = 16$, a proto $x = \pm 2$.
- Je-li $\lambda = -\frac{1}{8}$, pak díky (1) je $x = -y$. Dosazením do (3) obdržíme $x^2 = 1$, a tedy $x = \pm 1$.

Body minima tedy musíme hledat mezi body $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(2, 2)$ a $(-2, -2)$. Protože $f(1, -1) = f(-1, 1) = 2$ a $f(2, 2) = f(-2, -2) = 8$, jsou body $(1, -1)$ a $(-1, 1)$ hledané body minima.

3. Pro každé $z \in [0, 1]$ označme

$$M^{[z]} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2(1-z), 0 \leq y \leq 4-2x-4z\}.$$



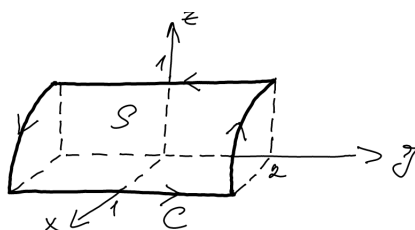
Obrázek 1: Znázornění množiny M a jejího „řezu“ $M^{[z]}$.

Množiny M a $M^{[z]}$ jsou načrtnuty na Obrázku 1. Z Fubiniho věty plyne, že

$$\begin{aligned} \int_M z^2 d\lambda_3(x, y, z) &= \int_0^1 \int_{M^{[z]}} z^2 d\lambda_2(x, y) dz = \int_0^1 \int_0^{2(1-z)} \int_0^{4-2x-4z} z^2 dy dx dz \\ &= \int_0^1 z^2 \int_0^{2(1-z)} (4-2x-4z) dx dz = 4 \int_0^1 z^2 (1-z)^2 dz = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

4. Plocha S je načrtnuta na Obrázku 2. Za parametrizaci plochy S volme například vektorovou funkci

$$\Phi(u, v) = (\sin u, v, \cos u), \quad (u, v) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [-2, 2].$$



Obrázek 2: Plocha S spolu s jejím okrajem C .

Potom

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} = (\sin u, 0, \cos u).$$

Odtud vidíme, že orientace plochy S indukovaná parametrizací Φ je souhlasná se zadanou orientací okraje C . Podle Stokesovy věty máme

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} \\ &= \int_{-2}^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3v^2 \sin u, -2v^3, 3v^2 \cos u) \cdot (\sin u, 0, \cos u) du dv = 8\pi. \end{aligned}$$

5. (a) Protože $(\frac{1}{2k}, -\frac{1}{4k^2} + \frac{1}{k}) \rightarrow \mathbf{a}$ a pro každé $k \in \mathbb{N}$ je $(\frac{1}{2k}, -\frac{1}{4k^2} + \frac{1}{k}) \in M = M \setminus \{\mathbf{a}\}$, je bod $\mathbf{a}$ hromadný bod množiny M . Bod $\mathbf{b}$ není hromadný bod M , protože $M \cap P(\mathbf{b}; 1) = \emptyset$.

(b) Bod $\mathbf{a}$ není izolovaný bod M , protože se jedná o bod hromadný. Bod $\mathbf{b}$ není izolovaný bod M , protože $\mathbf{b} \notin M$.

6. Ať $\mathbf{F}(u, v) = (F_1(u, v), F_2(u, v))$. Požadavek $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ na $\mathbb{R}^2$ znamená, že pro každé $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ je

$$\frac{\partial F_1}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial F_2}{\partial v}(u, v) = 0.$$

Požadavek $\nabla \cdot (\mathbf{F} \circ \Phi) = 0$ na $\mathbb{R}^2$ je splněn právě tehdy, když pro každé $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ je $2 \frac{\partial F_1}{\partial u}(2x, y) + \frac{\partial F_2}{\partial v}(2x, y) = 0$. Tedy pro každé $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ je

$$2 \frac{\partial F_1}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial F_2}{\partial v}(u, v) = 0.$$

Díky tomu platí

$$\frac{\partial F_1}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial F_2}{\partial v}(u, v) = 0$$

pro každé $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Odtud $F_1(u, v) = \varphi(v)$ a $F_2(u, v) = \psi(u)$, kde $\varphi, \psi \in C^1(\mathbb{R})$.

7. Ať $\Phi(u, v) = (u, \frac{v}{2})$. V nových proměnných přejde podmínka $x^2 + 4y^2 \leq 1$ na $u^2 + v^2 \leq 1$. Tedy

$$\Phi^{-1}(\Omega) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 1\}.$$

Navíc

$$|\det \mathbf{J}_\Phi(u, v)| = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2}.$$

Proto

$$\int_{\Omega} f(x, y) \, d\lambda_2(x, y) = \frac{1}{2} \int_{\Phi^{-1}(\Omega)} f\left(u, \frac{v}{2}\right) \, d\lambda_2(u, v).$$

Zadání B

- (a) Snadno nalezneme, že $\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = (0, (2 - \alpha)e^{2x}, 0)$. Tedy $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ na $\mathbb{R}^3$ právě tehdy, když $\alpha = 2$.
(b) Potenciál f musí splňovat

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = x - 2ze^{2x}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 3y^2, \quad (5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = z^2 - e^{2x}. \quad (6)$$

Integrací rovnice (4) dostaneme

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} - ze^{2x} + g(y, z)$$

kde $g(y, z)$ je zatím neznámá funkce dvou proměnných. Dosazením do (5) máme

$$\frac{\partial g}{\partial y}(y, z) = 3y^2,$$

a proto $g(y, z) = y^3 + h(z)$. Máme tak

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} - ze^{2x} + y^3 + h(z)$$

K určení neznámé funkce h využijeme rovnici (6). Dosazením obdržíme rovnici $h'(z) = z^2$. Proto $h(z) = \frac{z^3}{3} + C$, kde $C \in \mathbb{R}$. Z podmínky $f(0, 0, 1) = 0$ plyne, že $C = \frac{2}{3}$. Tedy

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} - ze^{2x} + y^3 + \frac{z^3}{3} + \frac{2}{3}.$$

- (c) Protože pro $\alpha = 2$ je $\mathbf{F}$ potenciálové na $\mathbb{R}^3$ a C je uzavřená křivka, je

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

- (a) Hledáme bod minima funkce

$$f(k, q) = (-2k + q + 1)^2 + (q - 1)^2 + (2k + q - 2)^2$$

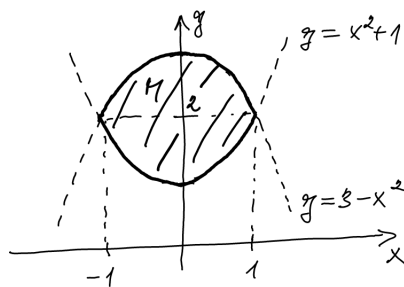
na množině $M = \mathbb{R}^2$.

- (b) Protože f je konvexní, je každý stacionární bod funkce f bodem minima. Z podmínky $\nabla f = \mathbf{0}$ máme

$$4k - 3 = 0,$$

$$3q - 2 = 0.$$

Tedy $k = \frac{3}{4}$ a $q = \frac{2}{3}$. Hledaná přímka je tak určena rovnicí $y = \frac{3}{4}x + \frac{2}{3}$.



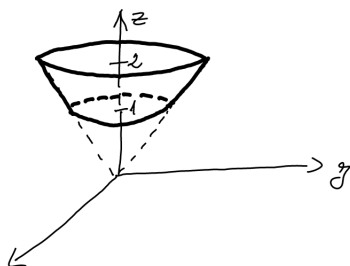
Obrázek 3: Množina M .

3. Množina M je znázorněna na Obrázku 3. Využitím Fubiniho věty dostaneme

$$\int_M y \, d\lambda_2(x, y) = \int_{-1}^1 \int_{x^2+1}^{3-x^2} y \, dy \, dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (3-x^2)^2 - (x^2+1)^2 \, dx = \frac{16}{3}.$$

4. Množina M je znázorněna na Obrázku 4. Protože $\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = x^2 + y^2$, plyne z Gaussovy věty, že

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_M x^2 + y^2 \, d\lambda_3(x, y, z) = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_0^z r^3 \, dr \, d\varphi \, dz = \frac{31\pi}{10}.$$



Obrázek 4: Množina M .

5. Z Obrázku 5 vidíme, že

$$\text{int}(M) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \|(x, y) - (1, -1)\| < 2\},$$

neboť každý bod z této množiny má nějaké okolí, které celé leží v M . Dále

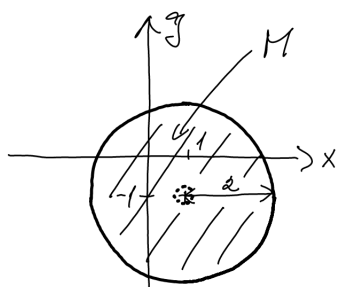
$$\partial M = \{(1, -1)\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y) - (1, -1)\| = 2\},$$

protože každé okolí bodů z uvedené množiny má neprázdný průnik s M i s $\mathbb{R}^2 \setminus M$.

6. Ze znalosti Taylorova polynomu máme $\nabla f(\mathbf{a}) = (0, 0)$ a

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tedy $\mathbf{a}$ je stacionární bod funkce f takový, že v něm je Hessova matice pozitivně definitní (protože $4 > 0$ a $\det \mathbf{H}_f(\mathbf{a}) = 7 > 0$). Díky tomu je $\mathbf{a}$ bod lokálního minima funkce f .



Obrázek 5: Množina M .

7. Z uvedené Fourierovy řady plyne, že $\frac{2\pi}{T} = 1$, a tedy $T = 2\pi$. Využijeme-li znalost vztahů pro výpočet koeficientů ve Fourierově řadě, dostaneme $0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos t \, dt$ a $\frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(3t) \, dt = \frac{1}{n^2+1} \Big|_{n=1} = \frac{1}{2}$. Odtud

$$\int_0^T f(t) \cos t \, dt = 0,$$

$$\int_0^T f(t) \sin(3t) \, dt = \frac{\pi}{2}.$$

Zadání C

1. (a) Protože $\nabla f(x, y) = (2x + 2y - 1, 2x + 6y + 2)$, má tečná rovina v bodě $(x, y, f(x, y))$ normálový vektor

$$\mathbf{v} = (2x + 2y - 1, 2x + 6y + 2, -1).$$

Normálový vektor roviny o rovnici $2x - 3y + z = 6$ je

$$\mathbf{w} = (2, -3, 1).$$

Aby tečná rovina byla rovnoběžná se zadanou rovinou, musí existovat reálné číslo $\lambda \in \mathbb{R}$ tak, že $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{w}$. Odtud plyne, že $\lambda = -1$ a navíc

$$2x + 2y = -1,$$

$$2x + 6y = 1.$$

Tedy $x = -1$ a $y = \frac{1}{2}$. Protože $f(-1, \frac{1}{2}) = \frac{11}{4}$, je

$$\mathbf{a} = \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{11}{4}\right).$$

- (b) Z nulovosti směrové derivace plyne, že

$$0 = \mathbf{h} \cdot (-1, 2) = -h_1 + 2h_2.$$

Tedy $h_1 = 2h_2$. Protože $\mathbf{h}$ je jednotkový vektor, musí platit

$$1 = \|\mathbf{h}\|^2 = h_1^2 + h_2^2 = 5h_2^2.$$

To znamená, že $h_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$. Proto

$$\mathbf{h} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1).$$

2. Podmínka stacionarity (nulovost gradientu) vede na soustavu rovnic

$$8x - 6x^2 - 2xy = 0, \tag{7}$$

$$-x^2 + y = 0. \tag{8}$$

Zřejmě (8) právě tehdy, když $y = x^2$. Dosazením do (7) obdržíme

$$0 = -2x(x^2 + 3x - 4) = -2x(x - 1)(x + 4).$$

Stacionární body proto jsou $(0, 0)$, $(1, 1)$ a $(-4, 16)$. Hessova matice funkce f v bodě (x, y) je

$$\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 8 - 12x - 2y & -2x \\ -2x & 1 \end{pmatrix}.$$

Protože

$$\mathbf{H}_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

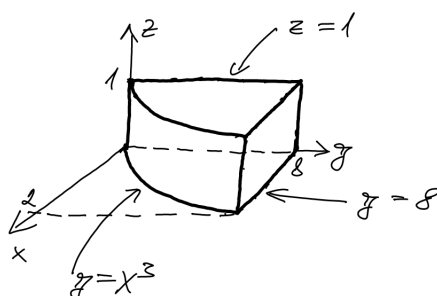
je pozitivně definitní ($\mathbf{H}_f(0,0)$ má evidentně kladná vlastní čísla), je $(0,0)$ bod lokálního minima. Matice

$$\mathbf{H}_f(1,1) = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{H}_f(-4,16) = \begin{pmatrix} 24 & 8 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

jsou indefinitní (jejich determinant je totiž záporný), a tedy $(1,1)$ a $(-4,16)$ jsou sedlové body funkce f .

3. Množina M je znázorněna na Obrázku 6. Podle Fubiniho věty je

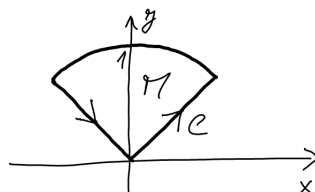
$$\int_M z \, d\lambda_3(x, y, z) = \int_0^1 \int_0^2 \int_{x^3}^8 z \, dy \, dx \, dz = \int_0^1 \int_0^2 z(8-x^3) \, dx \, dz = 12 \int_0^1 z \, dz = 6.$$



Obrázek 6: Množina M .

4. Množina M a křivka C jsou načrtnuty na Obrázku 7. Z Greenovy věty plyne, že

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_M \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) \, d\lambda_2(x, y) = \int_M (2x + 3y^2) \, d\lambda_2(x, y) \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^1 (2r \cos \varphi + 3r^2 \sin^2 \varphi) r \, dr \, d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\frac{2}{3} \cos \varphi + \frac{3}{4} \sin^2 \varphi \right) d\varphi \\ &= \frac{3}{4} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{3}{8} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (1 - \cos(2\varphi)) \, d\varphi = \frac{3}{16} (\pi + 2). \end{aligned}$$



Obrázek 7: Množina M a křivka C .

5. Musíme rozhodnout, zda existuje $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$. Vyšetřování limity vzhledem k přímkám, které procházejí počátkem, dává zřejmě vždy 0. Zkusíme tedy ukázat, že limita existuje a je rovna nule. Ať $((x_k, y_k))_{k=1}^{+\infty}$ je posloupnost bodů různých od $(0,0)$, která konverguje k $(0,0)$. V polárních souřadnicích máme $x_k = r_k \cos \varphi_k$ a $y_k = r_k \sin \varphi_k$, kde $r_k > 0$, $r_k \rightarrow 0$ a $\varphi_k \in [0, 2\pi)$. Proto

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k, y_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} r_k \sin^2 \varphi_k \cos \varphi_k = 0,$$

kde jsme využili faktu, že součin posloupnosti s nulovou limitou s posloupností omezenou má nulovou limitu. Z definice limity tedy máme $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$.

Funkci f tak lze v bodě $(0,0)$ spojitě dodefinovat a její spojitě rozšíření bude mít v bodě $(0,0)$ hodnotu 0.

Při výpočtu limity jsme mohli postupovat i jinak. Stačí využít odhad $|f(x,y)| \leq |x|$, který platí na prstencovém okolí počátku. Protože $|x|$ má v počátku nulovou limitu (plyne ze spojitosti), je $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$.

6. (a) Například $\varphi(t) = (\cos t, \cos t + \sin t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
 (b) Protože $\mathbf{a} = \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$ a $\varphi'(t) = (-\sin t, -\sin t + \cos t, \cos t)$, je hledaný jednotkový tečný vektor

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\varphi'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\|\varphi'\left(\frac{\pi}{4}\right)\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

7. (a) $\int_C \mathbf{F}(x,y) \cdot d\mathbf{s} = f(\varphi(1)) - f(\varphi(0)) = \ln 6 - \ln 2 = \ln 3$.
 (b) Snadno nalezneme, že $\nabla f(x,y) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}\right)$. Proto

$$\mathbf{h} = \frac{\nabla f(\mathbf{a})}{\|\nabla f(\mathbf{a})\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Zadání D

1. Snadno nalezneme, že

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= \left(\frac{1}{x} + e^{x-2y+1}, \frac{1}{y} - 2e^{x-2y+1} \right), \\ \mathbf{H}_f(x, y) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} + e^{x-2y+1} & -2e^{x-2y+1} \\ -2e^{x-2y+1} & -\frac{1}{y^2} + 4e^{x-2y+1} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Taylorův polynom druhého řádu funkce f v bodě $(1, 1)$ je proto

$$\begin{aligned}T_2(x, y) &= f(1, 1) + \nabla f(1, 1) \cdot (x - 1, y - 1) + \frac{1}{2}(x - 1, y - 1)\mathbf{H}_f(1, 1) \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 + 2(x - 1) - (y - 1) - 2(x - 1)(y - 1) + \frac{3}{2}(y - 1)^2.\end{aligned}$$

Odtud

$$f\left(\frac{9}{10}, \frac{11}{10}\right) \approx T_2(x, y) = \frac{144}{200}.$$

2. Z Weierstrassovy věty víme, že existují body minima a body maxima funkce f na M . Pokud takové body leží v $\text{int}(M)$, pak jsou to nutně stacionární body funkce f . Protože $\nabla f(x, y) = (4x - 4, 6y)$, je $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ právě tehdy, když $x = 1$ a $y = 0$. Zřejmě $(1, 0) \in \text{int}(M)$, a proto $(1, 0)$ je podezřelý bod z extrému.

Jestliže $(x, y) \in \partial M$ je bod extrému funkce f na M , pak nutně existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ tak, že

$$2x - 2 + \lambda x = 0, \tag{9}$$

$$3y + \lambda y = 0, \tag{10}$$

$$x^2 + y^2 = 16. \tag{11}$$

Zřejmě (10) platí právě tehdy, když $\lambda = -3$ nebo $y = 0$.

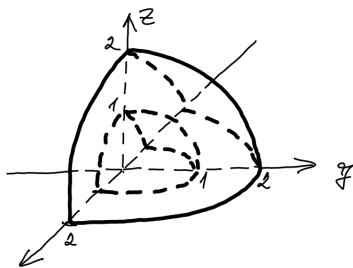
- Je-li $\lambda = -3$, pak z (9) plyne, že $x = -2$. Díky (11) je potom $y = \pm\sqrt{12}$.
- Je-li $y = 0$, pak z (11) máme $x = \pm 4$.

Podezřelé body z extrému ležící v ∂M jsou $(-2, \sqrt{12})$, $(-2, -\sqrt{12})$, $(-4, 0)$ a $(4, 0)$.

Protože $f(1, 0) = -2$, $f(-2, \sqrt{12}) = f(-2, -\sqrt{12}) = 52$, $f(4, 0) = 16$ a $f(-4, 0) = 48$, jsou $(-2, \sqrt{12})$ a $(-2, -\sqrt{12})$ body maxima funkce f na M a $(1, 0)$ je bod minima funkce f na M .

3. Množina M je znázorněna na Obrázku 8. Přejdem ke sférickým souřadnicím obdržíme

$$\begin{aligned}\int_M y \, d\lambda_3(x, y, z) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi \int_1^2 r^3 \sin \varphi \sin^2 \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta = 2 \left(4 - \frac{1}{4} \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \, d\theta \\ &= \left(4 - \frac{1}{4} \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos(2\theta) \, d\theta = \frac{15\pi}{8}.\end{aligned}$$



Obrázek 8: Množina M .

4. Využijeme-li Greenovu větu s vektorovým polem $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$, dostaneme

$$\begin{aligned} \text{obsah}(M) &= \int_M 1 \, d\lambda_2(x, y) = \int_M \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) \, d\lambda_2(x, y) \\ &= \int_{\partial M} \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (0, t^2 - t) \cdot (2t - 1, 3t^2 - 1) \, dt = \frac{1}{60}. \end{aligned}$$

5. Protože

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} f(x, y) &= -1, \\ \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} f(x, y) &= 1, \end{aligned}$$

limita v bodě $(0, 0)$ neexistuje.

6. (a) Například $\varphi(u, v) = (\cos v, u, v)$, $u \in [\sin v, 2]$, $v \in [0, 2\pi]$.

- (b) Protože $\mathbf{a} = \varphi(1, \frac{\pi}{3})$, $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(1, \frac{\pi}{3}) = (0, 1, 0)$ a $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(1, \frac{\pi}{3}) = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 1)$, je

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}\left(1, \frac{\pi}{3}\right) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}\left(1, \frac{\pi}{3}\right) = \left(1, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Tento normálový vektor s kladnou první komponentu musíme ještě znormovat na jednotkovou velikost. Hledaný jednotkový normálový vektor tedy je

$$\mathbf{v} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}\left(1, \frac{\pi}{3}\right) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}\left(1, \frac{\pi}{3}\right)}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}\left(1, \frac{\pi}{3}\right) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}\left(1, \frac{\pi}{3}\right) \right\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3}{4}}} \left(1, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{7}}, 0, \sqrt{\frac{3}{7}}\right).$$

7. Z $0 \leq y \leq 1$ dostaneme $0 \leq v \leq 1$. Navíc $0 \leq x \leq 1$ a $x = v - u$, a proto $v - 1 \leq u \leq v$. Ať $\Phi(u, v) = (v - u, v)$. Potom $\Phi^{-1}(\Omega) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v \in [0, 1], u \in [v - 1, v]\}$ a

$$\det \mathbf{J}_{\Phi}(u, v) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Proto

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x, y) \, d\lambda_2(x, y) &= \int_{\Phi^{-1}(\Omega)} f(v - u, v) |\det \mathbf{J}_{\Phi}(u, v)| \, d\lambda_2(u, v) \\ &= \int_0^1 \int_{v-1}^v f(v - u, v) \, du \, dv. \end{aligned}$$

Zadání E

- (a) Protože $\mathbb{R}^2$ je konvexní množina, je $\mathbf{F}$ potenciálové právě tehdy, když $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ na $\mathbb{R}^2$. Z uvedené rovnosti mezi parciálními derivacemi plyne, že $g'(y) \sin x = \sin x$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Tedy $g'(y) = 1$. Odtud $g(y) = y + K$, kde $K \in \mathbb{R}$.
(b) Z bodu (a) a podmínky $g(0) = 0$ plyne, že hledáme potenciál f k vektorovému poli

$$\mathbf{F}(x, y) = (y \sin x, 2y - \cos x).$$

Podle definice potenciálu musí platit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \sin x, \quad (12)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - \cos x. \quad (13)$$

Integrací rovnice (12) obdržíme $f(x, y) = -y \cos x + h(y)$, kde h je zatím neurčená funkce. Dosazením do (13) máme $h'(y) = 2y$. Tedy $h(y) = y^2 + C$, kde $C \in \mathbb{R}$. To znamená, že $f(x, y) = -y \cos x + y^2 + C$. Z podmínky $f(0, 2) = 0$ plyne, že $C = -2$. Hledaný potenciál proto je

$$f(x, y) = -y \cos x + y^2 - 2.$$

- Z podmínky nulovosti gradientu obdržíme soustavu rovnic

$$x - 1 = 0, \quad (14)$$

$$y(y^2 - 4z + 2) = 0, \quad (15)$$

$$4z - 2y^2 + 1 = 0. \quad (16)$$

Z (14) okamžitě obdržíme $x = 1$. Dále vidíme, že platí (15) právě tehdy, když $y = 0$ nebo $y^2 = 4z - 2$.

- Je-li $y = 0$, pak z (16) máme $z = -\frac{1}{4}$.
- Je-li $y^2 = 4z - 2$, pak z (16) plyne, že $-4z + 5 = 0$. Tedy $z = \frac{5}{4}$ a $y = \pm\sqrt{3}$.

Máme tak tři stacionární body, a to konkrétně $(1, 0, -\frac{1}{4})$, $(1, \sqrt{3}, \frac{5}{4})$ a $(1, -\sqrt{3}, \frac{5}{4})$. Zbývá určit jejich typ. Hessova matice funkce f v bodě (x, y, z) je

$$\mathbf{H}_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3y^2 - 2(2z - 1) & -4y \\ 0 & -4y & 4 \end{pmatrix}.$$

Protože

$$\mathbf{H}_f\left(1, 0, -\frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

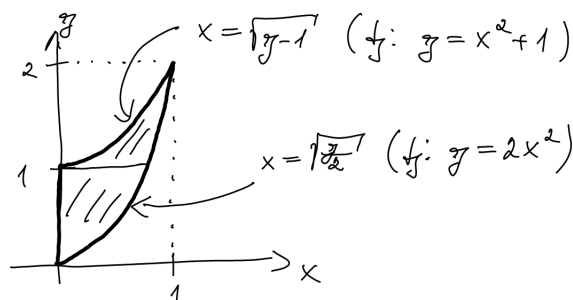
je pozitivně definitní (má evidentně kladná vlastní čísla), je $(1, 0, -\frac{1}{4})$ bod lokálního minima. Ze Sylvesterova kritéria snadno ukážeme, že

$$\mathbf{H}_f\left(1, \sqrt{3}, \frac{5}{4}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -4\sqrt{3} \\ 0 & -4\sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_f\left(1, -\sqrt{3}, \frac{5}{4}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4\sqrt{3} \\ 0 & 4\sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}.$$

jsou indefinitní matice, a proto $(1, \sqrt{3}, \frac{5}{4})$ a $(1, -\sqrt{3}, \frac{5}{4})$ jsou sedlové body.

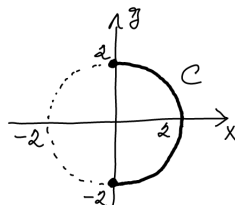
3. Uvažovaný součet dvou dvojnásobných integrálů reprezentuje integrál funkce e^{-x^3+3x} přes množinu M , která je znázorněná na Obrázku 9. Podle Fubiniho věty máme

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{\frac{y}{2}}} e^{-x^3+3x} dx dy + \int_1^2 \int_{\sqrt{y-1}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} e^{-x^3+3x} dx dy &= \int_0^1 \int_{2x^2}^{x^2+1} e^{-x^3+3x} dy dx \\ &= \int_0^1 (1-x^2)e^{-x^3+3x} dx = \frac{e^2-1}{3}. \end{aligned}$$



Obrázek 9: Množina M .

4. Křivka C je načrtnuta na Obrázku 10.



Obrázek 10: Křivka C .

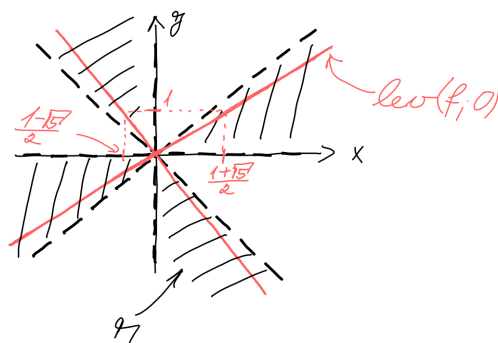
- (a) Parametrizace křivky C je například $\varphi(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
 (b) Využitím parametrizace z bodu (a) máme

$$\int_C x^2 + y ds = 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos^2 t + \sin t) dt = 4\pi.$$

5. Bod $(x, y) \in D(f)$ musí splňovat $0 < \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{x^2-y^2}{xy}$. Je-li $xy > 0$, potom $|x| > |y|$. Je-li $xy < 0$, pak $|x| < |y|$. Tedy

$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0, |x| > |y|\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 0, |x| < |y|\}$$

Náčrtek definičního oboru funkce je na Obrázku 11.



Obrázek 11: Množiny $D(f)$ a $\text{lev}(f; 0)$.

Hladina $\text{lev}(f; 0)$ je množina všech řešení rovnice $\frac{x^2 - y^2}{xy} = 1$. Hledáme tak všechna řešení rovnice $x^2 - y^2 = xy$ v $D(f)$. Vynásobíme-li obě strany rovnice číslem $\frac{1}{y^2}$ (pro všechny body (x, y) z $D(f)$ platí $y \neq 0$), dostaneme

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 1 - \frac{x}{y} = 0.$$

Využijeme-li substituci $t = \frac{x}{y}$, dostaneme $t^2 - t - 1 = 0$. Řešení této kvadratické rovnice jsou řešení $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Proto

$$\text{lev}(f; 0) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} y \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} y \right\}.$$

Hladina $\text{lev}(f; 0)$ je v Obrázku 11 zakreslena tlustou červenou čarou.

6. (a) Snadno nalezneme, že $\mathbf{J}_f(-1, 1) = \nabla f(-1, 1) = (-2, -1)$. Hledaný diferenciál je lineární zobrazení reprezentované Jacobiho maticí

$$\mathbf{J}_{f \circ \mathbf{g}}(\mathbf{a}) = \mathbf{J}_f(-1, 1) \mathbf{J}_g(\mathbf{a}) = (-2, -1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (-1, -4),$$

tj. $\text{d}f(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = -h_1 - 4h_2$.

- (b) $\nabla_v(f \circ \mathbf{g})(\mathbf{a}) = \text{d}f(\mathbf{a})(\mathbf{v}) = -9$.

7. Je dána funkce $f(t) = t^2$, $t \in [0, 2)$.

- (a) Fourierova řada funkce f je

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(\pi k t) + b_k \sin(\pi k t),$$

kde

$$a_k = \int_0^2 t^2 \cos(\pi k t) \, dt \quad \text{pro každé } k \in \mathbb{N}_0;$$

$$b_k = \int_0^2 t^2 \sin(\pi k t) \, dt \quad \text{pro každé } k \in \mathbb{N}.$$

- (b) Z Dirichletovy věty plyne, že $\mathcal{F}_f(0) = \frac{f(0+) + f(2-)}{2} = 2$ a $\mathcal{F}_f(9) = \mathcal{F}_f(1) = 1$.