

# Matematická analýza 2

## Posloupnosti a řady funkcí

Martin Bohata

Katedra matematiky  
FEL ČVUT v Praze  
martin.bohata@fel.cvut.cz

# Posloupnost funkcí – motivace

## Příklad

Pro každé  $k \in \mathbb{N}$  je dána úloha

$$x''(t) = k\chi_{[0, \frac{1}{k}]}(t), \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

- Pravá strana rovnice udává sílu působící na bodovou částici v čase  $t$ .
- Celkový impulz síly je vždy 1 nezávisle na  $k$ !
- Řešení zadané úlohy je

$$x_k(t) = \frac{k}{2}t^2\chi_{[0, \frac{1}{k}]}(t) + \left(t - \frac{1}{2k}\right)\chi_{(\frac{1}{k}, +\infty)}(t).$$

- Co se stane, když  $k \rightarrow +\infty$ ? Pro každé  $t \in \mathbb{R}$  pevné dostaneme

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k(t) = \max\{0, t\}.$$

- Zajímavost: pro každou spojitou funkci  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  platí

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)k\chi_{[0, \frac{1}{k}]}(t) dt = f(0).$$

# Posloupnost funkcí

Nechť  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  a  $f_k : D \rightarrow \mathbb{R}$  pro každé  $k \in \mathbb{N}$ . Posloupnost  $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$  se nazve **posloupnost funkcí na  $D$** .

## Definice (bodová konvergence)

Ať  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $M \subseteq D$  a  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Řekneme, že posloupnost  $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$  funkcí na  $D$  **konverguje bodově k  $f$  na  $M$** , jestliže pro každé  $\mathbf{x} \in M$  je

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}).$$

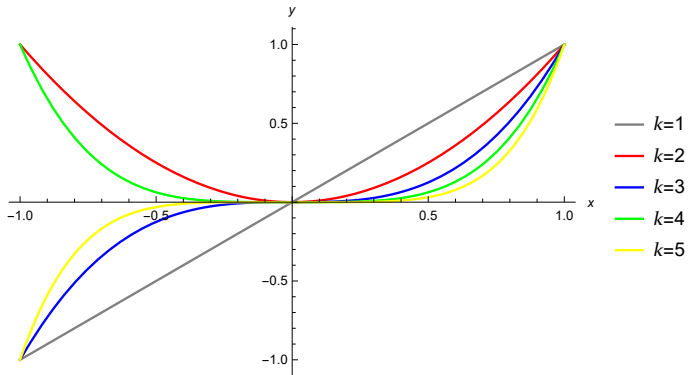
Terminologie a značení:

- $f_k \rightarrow f$  na  $M$  ...  $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$  konverguje bodově k  $f$  na  $M$ .
- $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$  **konverguje bodově na  $M$**  ... existuje  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  tak, že  $f_k \rightarrow f$  na  $M$ .

# Posloupnost funkcí

## Příklad

Nechť  $f_k(x) = x^k$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Potom  $f_k \rightarrow f$  na  $(-1, 1]$ , kde  $f(x) = 0$  pro každé  $x \in (-1, 1)$  a  $f(1) = 1$ .

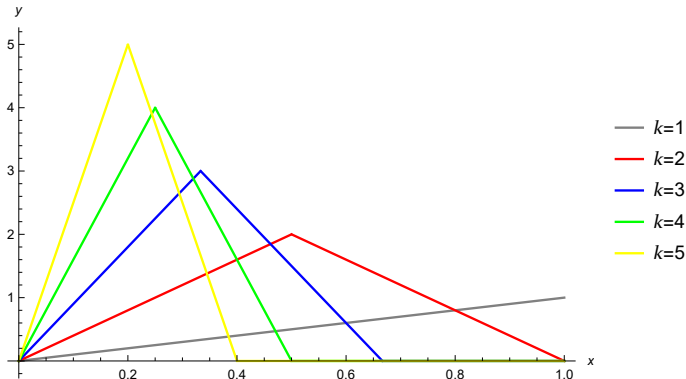


Bodová limita posloupnosti funkcí nemusí zachovávat důležité vlastnosti (např. spojitost)! Tento fakt motivuje zavedení jiných pojmů konvergence.

# Posloupnost funkcí

## Příklad

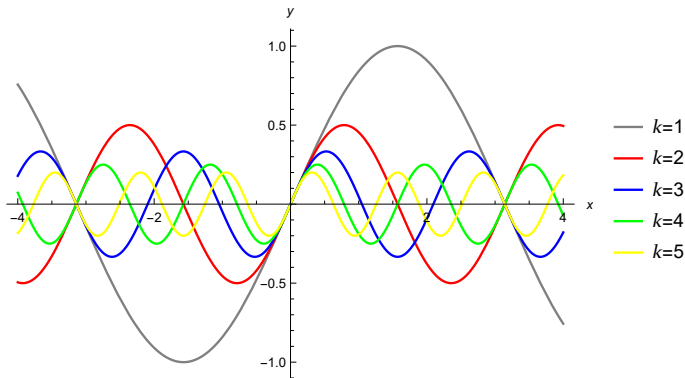
Nechť  $f_k(x) = k^2 x \chi_{[0, \frac{1}{k}]}(x) + k^2 \left(\frac{2}{k} - x\right) \chi_{(\frac{1}{k}, \frac{2}{k}]}(x)$ . Potom  $f_k \rightarrow f$  na  $[0, 1]$ , kde  $f(x) = 0$ . Snadno ukážeme, že  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_k(x) dx \neq \int_0^1 f(x) dx$ .



# Posloupnost funkcí

## Příklad

Nechť  $f_k(x) = \frac{1}{k} \sin(kx)$ . Potom  $f_k \rightarrow f$  na  $\mathbb{R}$ , kde  $f(x) = 0$ . Snadno ukážeme, že například  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f'_k(0) \neq f'(0)$ .



## Definice

Ať  $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$  je posloupnost funkcí na  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ .

- 1 Řada  $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$  se nazývá **(nekonečná) řada funkcí** na  $D$ .
- 2 Posloupnost  $(s_m)_{m=1}^{+\infty} := (\sum_{k=1}^m f_k)_{m=1}^{+\infty}$  se nazývá **posloupnost částečných součtů** řady  $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ .
- 3 Řekneme, že  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$  **konverguje (bodově) na  $M$** , jestliže posloupnost částečných součtů konverguje na  $M$ .
- 4 Funkce  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  se nazývá **součet řady  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$  na  $M$** , jestliže

$$f(\mathbf{x}) = \lim_{m \rightarrow +\infty} s_m(\mathbf{x})$$

pro každé  $\mathbf{x} \in M$ . Píšeme  $f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in M$ .

# Příklady řad funkcí

## Příklad

Řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{[0, \frac{1}{k}]}(x)$$

- konverguje na  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;
- nekonverguje v 0.

## Příklad

Řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + k^2}$$

konverguje na  $\mathbb{R}$ .

# Příklady řad funkcí

## Definice (mocinná řada)

Řada tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

kde klademe  $(x - x_0)^0 = 1$ , se nazývá **mocinná řada** se středem  $x_0 \in \mathbb{R}$  a koeficienty  $a_k \in \mathbb{R}$ .

## Příklad (geometrická řada)

Uvažme řadu  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ , kde klademe  $x^0 = 1$ .

- 1 Pro každé  $x \in \mathbb{R}$  splňující  $|x| \geq 1$  řada nekonverguje.
- 2 Pro každé  $x \in \mathbb{R}$  splňující  $|x| < 1$  řada konverguje a platí

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}.$$

# Příklady řad funkcí

- Pro každou mocninnou řadu existuje (jednoznačně určené) číslo  $R \in [0, +\infty]$  tak, že mocninná řada
  - 1 konverguje pro všechna  $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ ;
  - 2 nekonverguje pro všechna  $x \in \mathbb{R}$  splňující  $|x - x_0| > R$ .

Toto číslo se nazývá **poloměr konvergence**.

- Je-li  $R > 0$ , pak se interval  $(x_0 - R, x_0 + R)$  nazývá **interval konvergence**.
- Je-li  $R > 0$ , pak lze mocninnou řadu derivovat a integrovat člen po členu na intervalu konvergence.
- $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$  pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ .
- Podrobněji budou mocninné řady diskutovány v kurzu komplexní analýzy.

## Definice (trigonometrická řada)

Nechť  $T > 0$ ,  $a_k \in \mathbb{R}$  pro každé  $k \in \mathbb{N}_0$  a  $b_k \in \mathbb{R}$  pro každé  $k \in \mathbb{N}$ . Řada

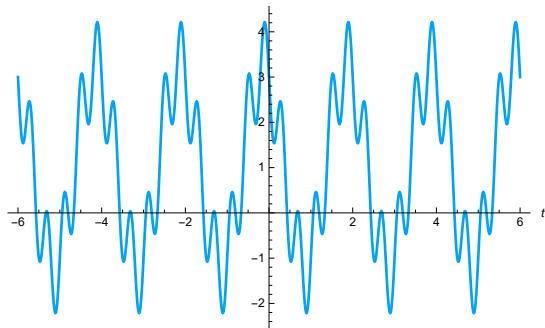
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)$$

se nazývá **trigonometrická řada**.

- Částečné součty trigonometrické řady se nazývají **trigonometrické polynomy**.
- Konverguje-li trigonometrická řada v nějakém bodě  $t \in \mathbb{R}$ , pak také konverguje v každém bodě  $t + lT$ , kde  $l \in \mathbb{Z}$ .
- Konverguje-li trigonometrická řada v nějakém bodě, pak její součet je periodická funkce s periodou  $T$ .

# Fourierovy řady – motivace

- Ať  $\omega > 0$  je pevně dáno. Mnoho periodických funkcí je lineární kombinací funkcí  $\sin(k\omega t)$  a  $\cos(k\omega t)$ , kde  $k \in \mathbb{N}_0$ . Například graf



odpovídá funkci

$$f(t) = 1 - \sin(\pi t) + 2 \cos(\pi t) - \sin(5\pi t).$$

# Fourierovy řady – motivace

- Například

$$f(t) = |\sin t|$$

ale nelze vyjádřit jako lineární kombinace funkcí  $\sin(k\omega t)$  a  $\cos(k\omega t)$ .

- Lze  $f(t) = |\sin t|$  vyjádřit jako součet nějaké trigonometrické řady?  
Pokud ano, jak najdeme koeficienty této řady?
- Počátky Fourierových řad (18. století a začátek 19. století): problémy vedení tepla a vlnění.
- Aplikace: diferenciální rovnice, fyzika, teorie signálů, komprese dat,...

# Ortogonalita vhodných funkcí

Nechť  $-\infty < a < b < +\infty$ .

$$L^2([a, b]) = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

## Tvrzení (relace ortogonality)

Nechť  $k, l \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  a  $T > 0$ . Potom

$$\int_a^{a+T} \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi lt}{T}\right) dt = 0,$$

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi lt}{T}\right) dt &= \int_a^{a+T} \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi lt}{T}\right) dt \\ &= \begin{cases} \frac{T}{2}, & \text{pro } k = l, \\ 0, & \text{pro } k \neq l. \end{cases} \end{aligned}$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

# Ortogonalita vhodných funkcí

Předpokládejme, že  $a \in \mathbb{R}$ ,  $T > 0$  a trigonometrická řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)$$

konverguje k funkci  $f \in L^2([a, a + T])$ .

- Jak najít koeficienty  $a_k$  a  $b_k$ ?
- Formálním využitím relací ortogonality (otázku záměnnosti řady a integrálu zde neřešme) obdržíme

$$a_k = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt,$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt.$$

# Fourierova řada

## Definice (Fourierova řada)

Nechť  $a \in \mathbb{R}$ ,  $T > 0$  a  $f \in L^2([a, a + T])$ . Řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)$$

kde

$$a_k = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt \quad \text{pro každé } k \in \mathbb{N}_0,$$
$$b_k = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt \quad \text{pro každé } k \in \mathbb{N},$$

se nazývá **Fourierova řada** funkce  $f$  a koeficienty  $a_k$  a  $b_k$  se nazývají **Fourierovy koeficienty** funkce  $f$ .

# Fourierova řada

- Definice Fourierovy řady lze zobecnit na integrovatelné funkce na intervalu  $[a, a + T)$ .
- Konverguje-li Fourierova řada funkce  $f$  v bodě  $t \in \mathbb{R}$ , označíme její součet symbolem  $\mathcal{F}_f(t)$ .

## Příklad

Je dána funkce

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \in [-1, 0), \\ 1 & \text{pro } t \in [0, 1). \end{cases}$$

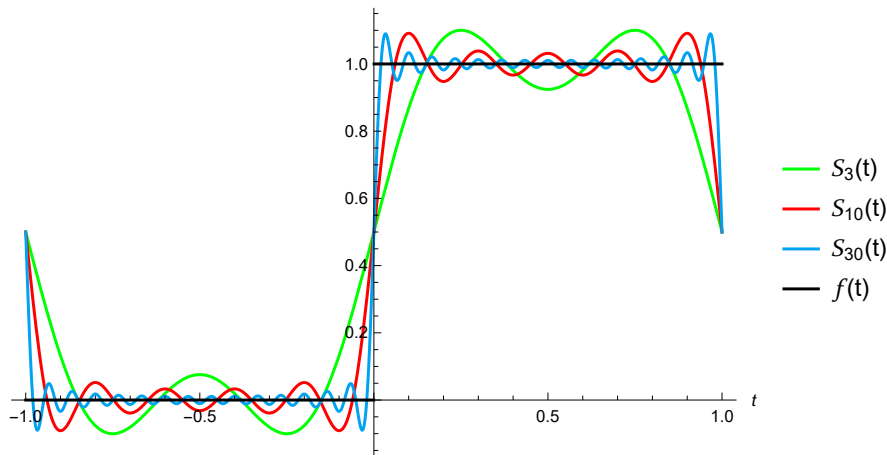
Fourierova řada funkce  $f$  je

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{\pi k} \sin(\pi kt).$$

# Fourierova řada

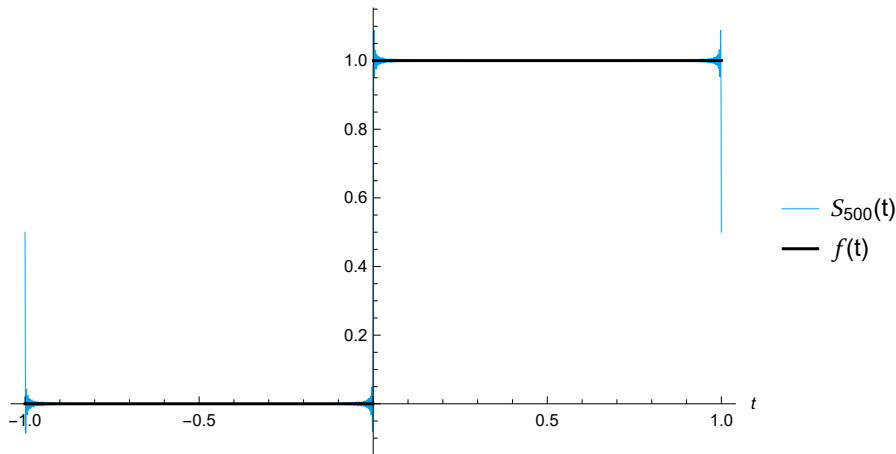
## Příklad (Pokračování)

Označme  $S_l(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^l \frac{1-(-1)^k}{\pi k} \sin(\pi kt)$ .



# Fourierova řada

## Příklad (Pokračování)



Velikost „překmitů“ částečných součtů  $S_l$  blízko bodů, ve kterých není  $f$  spojitá, se nezmenšuje s rostoucím  $l$ . Tomuto jevu se říká **Gibbsův jev**.

# Bodová konvergence Fourierovy řady

## Definice

Ať  $-\infty < a < b < +\infty$ . Řekneme, že funkce  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je **po částech spojitá** na  $[a, b)$ , jestliže existuje konečně mnoho bodů  $t_0, \dots, t_n$  tak, že

- 1  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ ;
- 2 pro každé  $k \in \{1, \dots, n\}$  je  $f$  spojitá na  $(t_{k-1}, t_k)$ ;
- 3  $f(t_k+) = \lim_{t \rightarrow t_k+} f(t)$  je konečná pro každé  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ ;
- 4  $f(t_k-) = \lim_{t \rightarrow t_k-} f(t)$  je konečná pro každé  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

- Podle uvedené definice nemusí být po částech spojitá funkce definována v bodech  $t_0, \dots, t_n$ .

## Věta (Dirichletova věta)

Nechť  $a \in \mathbb{R}$ ,  $T > 0$  a  $f : [a, a + T) \rightarrow \mathbb{R}$ . Předpokládejme, že  $f$  a  $f'$  jsou po částech spojitě funkce na  $[a, a + T)$ . Pak Fourierova řada funkce  $f$  konverguje v každém bodě intervalu  $[a, a + T)$  a její součet je

- 1  $\mathcal{F}_f(t) = \frac{1}{2} [f(t+) + f(t-)]$  pro každé  $t \in (a, a + T)$ ;
- 2  $\mathcal{F}_f(a) = \frac{1}{2} [f(a+) + f((a + T)-)]$ .

Důkaz: Vynecháváme. ■

- Jsou-li splněny předpoklady Dirichletovy věty a  $f$  je spojitá na  $[a, a + T)$ , pak  $f(t) = \mathcal{F}_f(t)$  pro každé  $t \in [a, a + T)$ . V tomto případě je tak  $\mathcal{F}_f(t)$  periodickým rozšířením funkce  $f(t)$ .

# Bodová konvergence Fourierovy řady

## Příklad

Již víme, že Fourierova řada funkce

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \in [-1, 0) \\ 1 & \text{pro } t \in [0, 1). \end{cases}$$

je

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{\pi k} \sin(\pi kt).$$

Podle Dirichletovy věty konverguje tato řada pro každé  $t \in [-1, 1)$  (a tedy pro každé  $t \in \mathbb{R}$ ) a platí, že

$$\mathcal{F}_f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro každé } t \in (-1, 0), \\ 1 & \text{pro každé } t \in (0, 1), \\ \frac{1}{2} & \text{pro každé } t \in \{-1, 0, 1\}. \end{cases}$$

## Příklad

Je dána funkce

$$f(t) = \sin t, \quad t \in [0, \pi).$$

Fourierova řada této funkce je

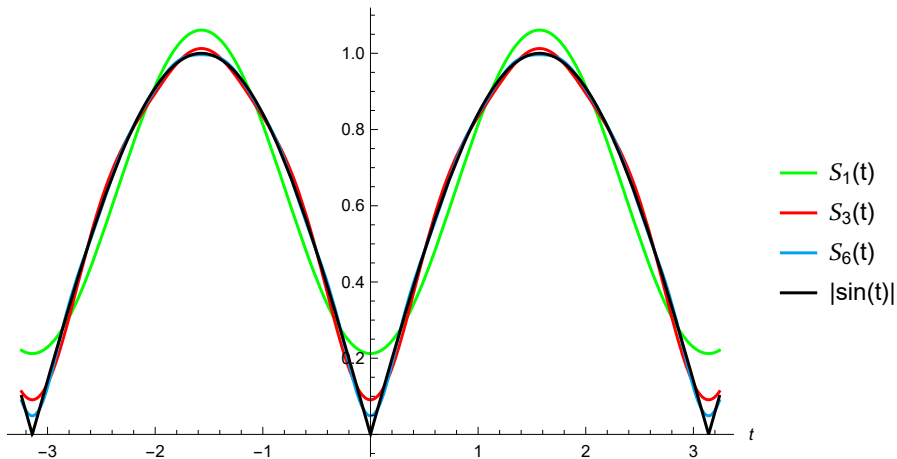
$$\frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4k^2)} \cos(2kt).$$

Z Dirichletovy věty plyne, že  $\mathcal{F}_f(t) = |\sin t|$  pro každé  $t \in \mathbb{R}$ .

# Příklady

## Příklad (Pokračování)

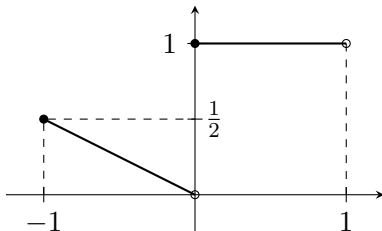
Označme  $S_l = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^l \frac{4}{\pi(1-4k^2)} \cos(2kt)$ .



# Příklady

## Příklad

Funkce  $f : [-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  má graf



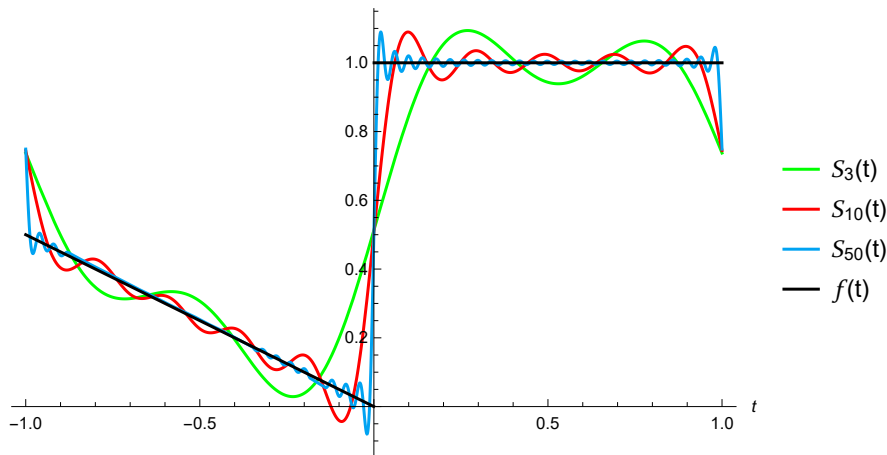
Její Fourierova řada je

$$\frac{5}{8} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1 + (-1)^k}{2k^2\pi^2} \cos(k\pi t) + \frac{2 - (-1)^k}{2k\pi} \sin(k\pi t).$$

# Příklady

## Příklad (Pokračování)

Označme  $S_l = \frac{5}{8} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1+(-1)^k}{2k^2\pi^2} \cos(k\pi t) + \frac{2-(-1)^k}{2k\pi} \sin(k\pi t)$ .



## Příklad (Pokračování)

Z Dirichletovy věty plyne, že  $\mathcal{F}_f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je periodická funkce s periodou 2, která splňuje

$$\mathcal{F}_f(t) = \begin{cases} \frac{3}{4}, & t = -1, \\ -\frac{t}{2}, & t \in (-1, 0), \\ \frac{1}{2}, & t = 0, \\ 1, & t \in (0, 1). \end{cases}$$

Odtud například vidíme, že  $\mathcal{F}_f(-7) = \frac{3}{4}$ .