

Matematická analýza 2

Vektorové funkce

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
martin.bohata@fel.cvut.cz

Vektorová funkce

Zobrazení $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ se nazývá **vektorová funkce** (n reálných proměnných).

- $D(f) := D$... **definiční obor funkce f** .
- $\text{ran}(f) := f(D) = \{f(x) \in \mathbb{R}^m \mid x \in D\}$... **obor hodnot funkce f** .
- $\text{gr}(f) := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid x \in D\}$... **graf funkce f** .
- Je-li $m = n$, pak se f občas nazývá **vektorové pole**.
- Je-li $m = 1$, pak se f nazývá **reálná funkce** (případně **skalární funkce**).

Úmluva

Pokud je funkce zadána předpisem bez explicitního uvedení definičního oboru, budeme pod jejím definičním oborem rozumět největší podmnožinu $\mathbb{R}^n$, pro kterou má předpis smysl.

Vektorová funkce

- Je-li $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ reálná funkce a $c \in \mathbb{R}$, pak **hladina** (případně **vrstevnice**) funkce f výšky c je množina

$$\text{lev}(f; c) := f^{-1}(\{c\}) = \{\mathbf{x} \in D \mid f(\mathbf{x}) = c\}.$$

- Je-li $\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, potom $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$, kde $f_1, \dots, f_m$ jsou reálné funkce nazývané **složky** (nebo také **komponenty**) vektorové funkce $\mathbf{f}$.
- Ať $f_i : D_i \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, kde $i \in \{1, \dots, m\}$, jsou reálné funkce a $D = \bigcap_{i=1}^m D_i$. Potom předpis $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$ definuje vektorovou funkci $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Několik příkladů reálných funkcí

Příklad (charakteristická funkce)

Charakteristická funkce množiny $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je funkce

$$\chi_M(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in M; \\ 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus M. \end{cases}$$

Příklad

- ❶ $f(x, y) = e^x$.
- ❷ $f(t, x) = \sin(2\pi x) \sin(6t)$.
- ❸ $p(T, V) = nR\frac{T}{V}$, $(T, V) \in [0, \infty) \times (0, \infty)$.

Polynom a racionální funkce

Definice (polynom a racionální funkce)

Polynom (více proměnných) je funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, která je součtem konečně mnoha funkcí tvaru

$$\alpha x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n},$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$, $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}_0$ a klademe $x_i^0 = 1$.

Jsou-li $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ polynomy a množina $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid q(\mathbf{x}) \neq 0\}$ je neprázdná. Potom se funkce $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$f(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x})}{q(\mathbf{x})},$$

nazývá **racionální funkce**.

Důležité příklady funkcí

Příklad (afinní funkce)

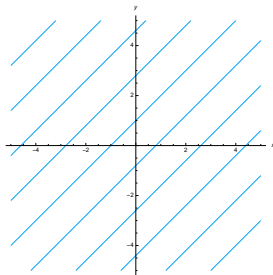
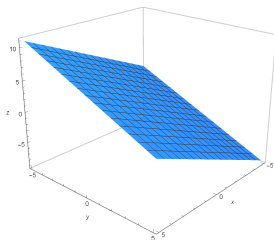
Afinní funkce je funkce

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x} + b_1, \dots, \mathbf{a}_m \cdot \mathbf{x} + b_m),$$

kde $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ a $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$.

S využitím sloupcového zápisu vektorů můžeme psát $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, kde $\mathbf{A}$ je reálná $m \times n$ matice a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

Příkladem (skalární) afinní funkce je polynom $f(x, y) = x - y + 1$.



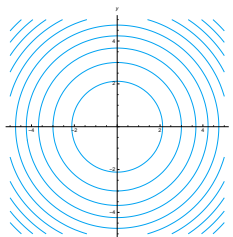
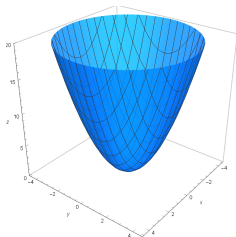
Důležité příklady funkcí

Příklad (kvadratická forma)

Ať Q je reálná symetrická $n \times n$ matice se složkami $q_{ij} \in \mathbb{R}$. **Kvadratická forma** je funkce

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n q_{ij} x_i x_j.$$

S využitím sloupcového zápisu vektorů lze psát $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Q \mathbf{x}$.
Příkladem kvadratické formy je funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$.



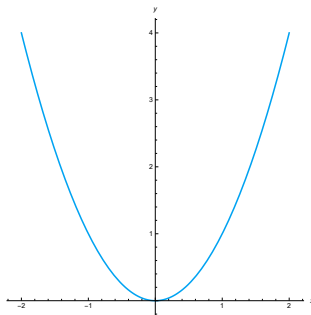
Příklady vektorových funkcí

Příklad

Obor hodnot vektorové funkce

$$\varphi(t) = (t, t^2)$$

je parabola.



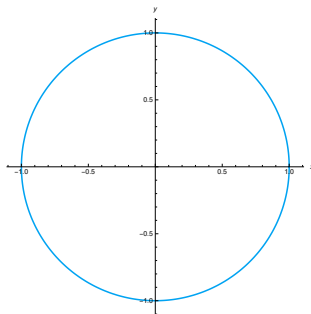
Příklady vektorových funkcí

Příklad

Obor hodnot vektorové funkce

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

je kružnice se středem v počátku a poloměrem 1.



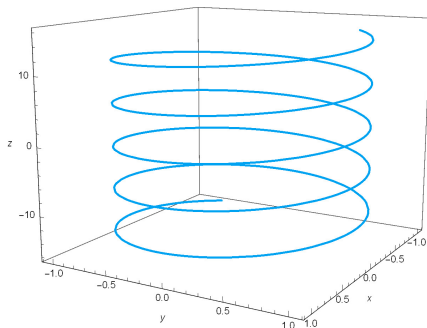
Příklady vektorových funkcí

Příklad

Obor hodnot vektorové funkce

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t, t).$$

je (nekonečná) spirála.



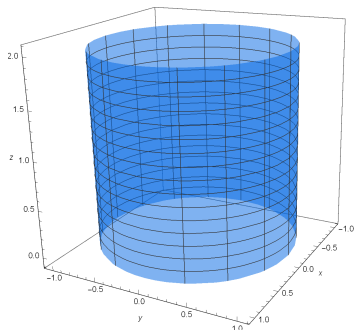
Příklady vektorových funkcí

Příklad

Obor hodnot vektorové funkce

$$\varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v), \quad u \in [0, 2\pi], v \in [0, 2].$$

je plášť válce výšky 2.



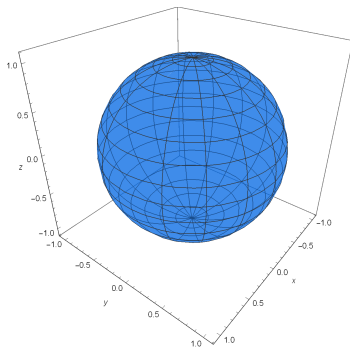
Příklady vektorových funkcí

Příklad

Obor hodnot vektorové funkce

$$\varphi(u, v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v), \quad u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi].$$

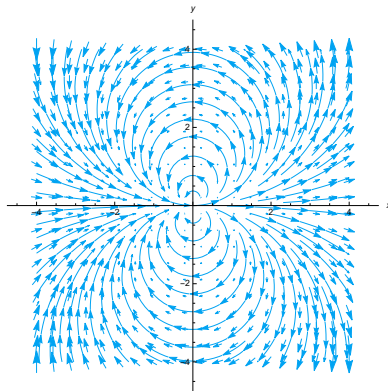
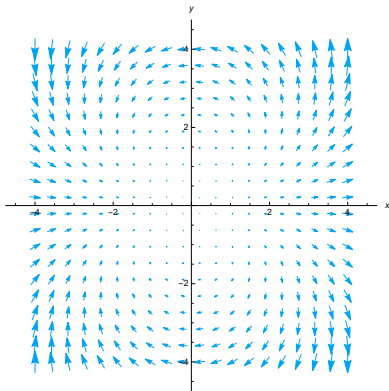
je sféra se středem v počátku a poloměrem 1.



Příklady vektorových funkcí

Příklad

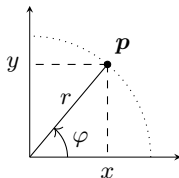
$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$



Příklady vektorových funkcí

Příklad (polární souřadnice)

Ať $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.



Potom můžeme psát

$$x = r \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \varphi,$$

kde $r \in (0, \infty)$ a $\varphi \in [0, 2\pi)$ jsou jednoznačně určeny. Máme tak definováno prosté zobrazení $\Psi : (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ předpisem

$$\Psi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$