

# Matematická analýza 2

## Limita a spojitost

Martin Bohata

Katedra matematiky  
FEL ČVUT v Praze  
martin.bohata@fel.cvut.cz

## Definice (limita vektorové funkce)

Nechť  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $a$  je hromadný bod množiny  $M \subseteq D$  a  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  je vektorová funkce. Řekneme, že  $L \in \mathbb{R}^m$  je **limita  $f$  v bodě  $a$  vzhledem k  $M$** , jestliže pro každou posloupnost  $(x_k)_{k=1}^{+\infty}$  bodů v  $M \setminus \{a\}$  konvergující k  $a$  platí  $f(x_k) \rightarrow L$  pro  $k \rightarrow +\infty$ . Pokud  $L$  je limita  $f$  v bodě  $a$  vzhledem k  $M$ , pak píšeme

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f(x) = L.$$

## Úmluva

Místo

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f(x) = L$$

budeme pro jednoduchost často psát jen

- ①  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , jestliže  $M = D$ ;
- ②  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ V(x)}} f(x) = L$ , jestliže  $M = \{x \in D \mid V(x)\}$ , kde  $V(x)$  je nějaká výroková forma.

## Věta (Heineho věta)

*Nechť  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ , kde  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , je vektorová funkce,  $a$  je hromadný bod množiny  $M \subseteq D$  a  $L \in \mathbb{R}^m$ . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- ①  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f(x) = L.$
- ② *Pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  tak, že pro každé  $x \in P(a; \delta) \cap M$  je  $f(x) \in U(L; \varepsilon)$ .*

Důkaz: Vynecháváme (analogické jako v jedné proměnné). ■

## Tvrzení (jednoznačnost limity vektorové funkce)

*Existuje-li limita vektorové funkce  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  v bodě  $a \in \mathbb{R}^n$  vzhledem k  $M \subseteq D$ , pak je určena jednoznačně.*

Důkaz: Viz přednáška. ■

## Příklad (základní příklady)

- ❶ Ať  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$  a  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Potom pro každé  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  je

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}.$$

- ❷ Ať  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Reálná funkce  $\sigma_i(\mathbf{x}) = x_i$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , se nazývá ***i-tá souřadnicová projekce***. Pro každé  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  je

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \sigma_i(\mathbf{x}) = \sigma_i(\mathbf{a}) = a_i.$$

- ❸ Pro každé  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  je

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{a}\|.$$

## Tvrzení

Nechť  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  je vektorová funkce,  $a$  je hromadný bod množiny  $M \subseteq D$  a  $L \in \mathbb{R}^m$ . Potom je ekvivalentní:

- 1  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f(x) = L.$
- 2 Pro každou množinu  $N \subseteq M$  takovou, že  $a$  je její hromadný bod, platí  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in N}} f(x) = L.$

Důkaz: Viz přednáška. ■

## Příklad

Limita

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

neexistuje.

## Tvrzení (konvergence vektorové funkce po složkách)

Nechť  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  je vektorová funkce a  $a$  je hromadný bod množiny  $M \subseteq D$ . Jestliže  $f_1, \dots, f_m$  jsou složky vektorové funkce  $f$  a  $L = (L_1, \dots, L_m) \in \mathbb{R}^m$ , potom je ekvivalentní:

- ①  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f(x) = L.$
- ②  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f_i(x) = L_i$  pro každé  $i = 1, \dots, m.$

Důkaz: Viz přednáška. ■

## Příklad

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-3,4)} (\|(x,y)\|, x) = (5, -3).$$

# Limita funkce

## Tvrzení

*Nechť  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f(x) = A$  a  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} g(x) = B$ . Pak*

- ❶  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} \alpha f(x) = \alpha A$ ;
- ❷  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f(x) + g(x) = A + B$ ;
- ❸  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f(x)g(x) = AB$ ;
- ❹ *je-li  $g(x) \neq 0$  pro každé  $x \in M$  a  $B \neq 0$ , potom  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ ;*
- ❺ *existuje-li  $\delta > 0$  tak, že  $f(x) \leq g(x)$  pro každé  $x \in M \cap P(a; \delta)$ , potom  $A \leq B$ ;*
- ❻ *je-li  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  na  $M$  a  $A = B$ , potom  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} h(x) = A$ .*

Důkaz: Viz přednáška.

## Příklad

1

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x| y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

2

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,1)} \frac{3x^2 - xy}{x^2 + y^2} = 2.$$

3

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \cos \frac{1}{y}}{1 + x^2 + y^2} = 0.$$

# Limita funkce

## Věta (limita složené funkce)

Nechť  $f : E \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  a  $g : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Předpokládejme dále, že platí

- ①  $a$  je hromadný bod množiny  $M \subseteq D$ ;
- ②  $b \in E$  je hromadný bod množiny  $N \subseteq E$  a  $g(M) \subseteq N$ ;
- ③  $\lim_{\substack{y \rightarrow b \\ y \in N}} f(y) = f(b)$  a  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} g(x) = b$ ;

Potom  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f(g(x)) = f(b)$ .

Důkaz: Vynecháváme. ■

## Příklad

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+y} = 1.$$

## Definice (spojitá funkce)

Nechť  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  a  $\mathbf{a} \in D$ .

- 1 Řekneme, že vektorová funkce  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  je **spojitá v bodě  $\mathbf{a}$** , jestliže pro každou posloupnost  $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{+\infty}$  bodů v  $D$  splňující  $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{a}$  pro  $k \rightarrow +\infty$  platí  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{a})$  pro  $k \rightarrow +\infty$ .
- 2 Funkce  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  se nazve **spojitá na  $M \subseteq D$** , jestliže  $\mathbf{f}$  je spojitá v každém bodě  $M$ . Je-li  $\mathbf{f}$  spojitá na svém definičním oboru  $D$ , pak krátce říkáme, že  $\mathbf{f}$  je **spojitá**.
- 3 Množinu všech spojitých vektorových funkcí  $\mathbf{f} : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  značíme symbolem  $C(M; \mathbb{R}^m)$ . Je-li  $m = 1$ , pak místo  $C(M; \mathbb{R})$  píšeme jen  $C(M)$ .

## Věta (charakterizace spojitosti v bodě)

Nechť  $a \in D \subseteq \mathbb{R}^n$  a  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Potom je ekvivalentní

- ①  $f$  je spojitá v  $a$ .
- ② Platí jedna z následujících podmínek:
  - (i)  $a$  je izolovaný bod množiny  $D$ ;
  - (ii)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .
- ③ Pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  tak, že pro každé  $x \in U(a; \delta) \cap D$  platí  $f(x) \in U(f(a); \varepsilon)$ .

Důkaz: Vynecháváme. ■

## Přiklad (spojitosť konstantní funkce)

Ať  $c \in \mathbb{R}^m$ . Funkce  $f(x) = c$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , je spojitá.

## Přiklad (spojitosť souřadnicové projekce)

Nechť  $i \in \{1, \dots, n\}$  a  $\sigma_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je  $i$ -tá souřadnicová projekce (tj.  $\sigma_i(x) = x_i$ ). Potom  $\sigma_i$  je spojitá.

## Přiklad (spojitosť normy)

Ať  $f(x) = \|x\|$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Potom  $f$  je spojitá.

## Tvrzení (spojitost složek vektorové funkce)

*$Ať a \in D \subseteq \mathbb{R}^n$  a  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  je vektorová funkce se složkami  $f_1, \dots, f_m$ . Potom  $f$  je spojitá v bodě  $a$  právě tehdy, když pro každé  $i \in \{1, \dots, m\}$  je  $f_i$  spojitá v bodě  $a$ .*

Důkaz: Viz přednáška. ■

## Příklad

Vektorová funkce

$$\Phi(t, x, y, z) = (t, x - vt, y, z),$$

kde  $v \in [0, \infty)$ , je spojitá vektorová funkce.

## Tvrzení (spojitost a aritmetické operace)

*Nechť reálné funkce  $f$  a  $g$  jsou spojité v bodě  $a$ . Potom*

- ①  $f + g$  je spojitá v  $a$ ;
- ②  $fg$  je spojitá v  $a$ ;
- ③ jestliže  $g(a) \neq 0$ , potom  $\frac{f}{g}$  je spojitá v  $a$ ;

Důkaz: Viz přednáška. ■

## Příklad

- ① Každý polynom je spojitá funkce.
- ② Každá racionální funkce je spojitá a její definiční obor je otevřená množina.

## Tvrzení (spojitost složené funkce)

*Nechť  $f : E \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  a  $g : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Jestliže vektorová funkce  $g$  je spojitá v bodě  $a$  a vektorová funkce  $f$  je spojitá v bodě  $g(a)$ , potom vektorová funkce  $f \circ g$  je spojitá v bodě  $a$ .*

Důkaz: Viz přednáška. ■

## Příklad

Vektorové pole

$$F(x) = \frac{x}{\|x\|^3}$$

je spojité (na svém definičním oboru  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ).

## Příklad

Funkce

$$f(x, y) = \frac{y \sin y}{\sqrt{x^2 + y^2} - x}$$

je spojitá na svém definičním oboru a lze spojitě rozšířit do bodu  $(0, 0)$ .

## Příklad

Funkce

$$f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} - x}$$

je spojitá na svém definičním oboru a nelze spojitě rozšířit do bodu  $(0, 0)$ .

## Věta (charakterizace spojitosti pomocí otevřených množin)

*Pro každou vektorovou funkci  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  jsou následující výroky ekvivalentní:*

- 1  $f$  je spojitá.
- 2 Pro každou otevřenou množinu  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  existuje otevřená množina  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  tak, že  $f^{-1}(V) = \Omega \cap D$ .

Důkaz: Vynecháváme. ■