

Matematická analýza 2

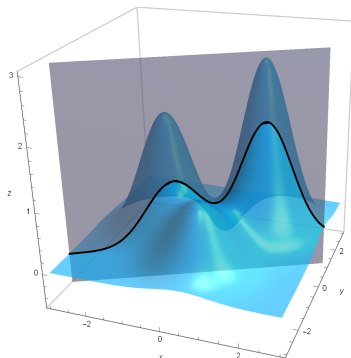
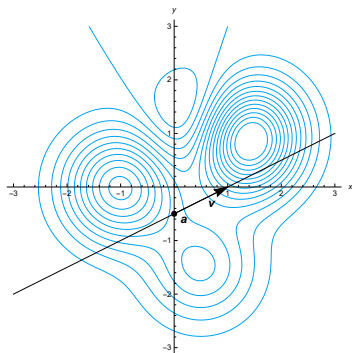
Směrová a parciální derivace

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
martin.bohata@fel.cvut.cz

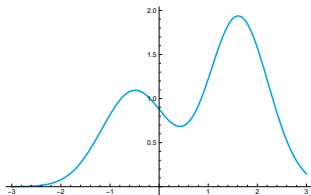
Motivace

- Ať $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ přiřazuje bodům na mapě D nadmořskou výšku.
- V mapě se vydáme z bodu a rovnoměrně přímočaře rychlostí v . Jaká bude okamžitá změna nadmořské výšky v bodě a ?



Motivace

- Zkonstruuujeme „průřezovou funkci“ $\varphi(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$.



- Okamžitá změna nadmořské výšky v bodě $\mathbf{a}$ při rovnoměrně přímočarém pohybu rychlostí $\mathbf{v}$ je

$$\varphi'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t}.$$

Definice (směrová derivace)

Ať $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, a je vnitřní bod množiny D a $v \in \mathbb{R}^n$. Vektor $\nabla_v f(a) \in \mathbb{R}^m$ se nazývá **směrová derivace (řádu 1) funkce f v bodě a podle v** , jestliže

$$\nabla_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

Má-li f v nějakém bodě směrovou derivaci (řádu 1) podle v , potom se funkce

$$\nabla_v f : x \mapsto \nabla_v f(x)$$

nazývá **směrová derivace (řádu 1) funkce f podle v** .

Směrová derivace

- Položme $\varphi(t) = \mathbf{f}(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$. Potom

$$\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0),$$

kde $\varphi'(0) = (\varphi'_1(0), \dots, \varphi'_m(0))$.

- Existuje-li směrová derivace $\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{f}(\mathbf{a})$, pak je určena jednoznačně.
- $\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{f}(\mathbf{a}) = (\nabla_{\mathbf{v}} f_1(\mathbf{a}), \dots, \nabla_{\mathbf{v}} f_m(\mathbf{a}))$, má-li jedna ze stran rovnosti smysl.
- $\nabla_{\mathbf{0}} \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.
- Funkce $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ je spojitá, ale nemá směrovou derivaci v bodě $\mathbf{0}$ podle žádného vektoru $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Příklad

- ❶ At' $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$ a $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$. Potom pro každé $\mathbf{v}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je

$$\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

- ❷ Mějme funkci $f(x, y) = -x^2 - 4y^2$ a vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Potom

$$\nabla_{\mathbf{v}} f(x, y) = -2xv_1 - 8yv_2.$$

Speciálně

$$\nabla_{(0,1)} f(2, 1) = -8,$$

$$\nabla_{(-1,0)} f(2, 1) = 4.$$

Tvrzení (směrová derivace a aritmetické operace)

*Nechť reálné funkce f a g mají směrovou derivaci v bodě $\mathbf{a}$ podle $\mathbf{v}$.
Potom*

- ① $\nabla_{\mathbf{v}} (f + g) (\mathbf{a}) = \nabla_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) + \nabla_{\mathbf{v}} g(\mathbf{a});$
- ② $\nabla_{\mathbf{v}} (fg) (\mathbf{a}) = [\nabla_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a})] g(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a}) [\nabla_{\mathbf{v}} g(\mathbf{a})];$
- ③ *je-li $g(\mathbf{a}) \neq 0$, pak*

$$\nabla_{\mathbf{v}} \frac{f}{g} (\mathbf{a}) = \frac{[\nabla_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a})] g(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a}) [\nabla_{\mathbf{v}} g(\mathbf{a})]}{[g(\mathbf{a})]^2}.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Směrová derivace vyšších řádů

Definice (směrová derivace vyšších řádů)

Ať $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

- ① Je-li $k \geq 2$ přirozené číslo, $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ a a je vnitřní bod definičního oboru funkce $\nabla_{v_{k-1}} \dots \nabla_{v_1} f$, potom se vektor

$$\nabla_{v_k} \dots \nabla_{v_1} f(a) := \nabla_{v_k} (\nabla_{v_{k-1}} \dots \nabla_{v_1} f)(a)$$

nazývá **směrová derivace funkce f řádu k v bodě a podle $v_1, \dots, v_k$** .

- ② Existuje-li v nějakém bodě směrová derivace funkce f řádu k podle $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$, potom funkci

$$\nabla_{v_k} \dots \nabla_{v_1} f : x \mapsto \nabla_{v_k} \dots \nabla_{v_1} f(x)$$

nazýváme **směrovou derivací funkce f řádu k podle $v_1, \dots, v_k$** .

Směrová derivace vyšších řádů

- Značení:
 - $\nabla_h^0 f(a) := f(a)$ pro každé $h \in \mathbb{R}^n$.
 - $\nabla_h^k f(a)$... směrová derivaci řádu $k \in \mathbb{N}$ v bodě a podle $v_1 = h, \dots, v_k = h$.
- Později si ukážeme, že obecně neplatí rovnost mezi $\nabla_w \nabla_v f(a)$ a $\nabla_v \nabla_w f(a)$.

Příklad

Uvažme funkci $f(x, y) = -x^2 - 4y^2$. Již víme, že pro $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ je $\nabla_v f(x, y) = -2xv_1 - 8yv_2$. Pro $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ proto je

$$\nabla_w \nabla_v f(x, y) = -2v_1w_1 - 8v_2w_2.$$

Speciálně

$$\nabla_v^2 f(x, y) = -2v_1^2 - 8v_2^2.$$

Je směrová derivace $\nabla_v \mathbf{f}(\mathbf{a})$ lineární vzhledem k $\mathbf{v}$?

Pro funkci $f(x, y) = -x^2 - 4y^2$ je pro každé $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ zobrazení

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) \mapsto \nabla_{\mathbf{v}} f(x, y) = -2xv_1 - 8yv_2$$

lineární. Je to obecný jev?

Tvrzení (homogenita směrové derivace vzhledem k $\mathbf{v}$)

*Ať $\alpha \in \mathbb{R}$ a vektorová funkce $\mathbf{f}$ má směrovou derivaci v bodě $\mathbf{a}$ podle $\mathbf{v}$.
Potom*

$$\nabla_{\alpha \mathbf{v}} \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \alpha \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{f}(\mathbf{a}).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Je směrová derivace $\nabla_v f(\mathbf{a})$ lineární vzhledem k $\mathbf{v}$?

Příklad

Nechť $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ a

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Potom

$$\nabla_v f(0, 0) = \begin{cases} \frac{v_1^2}{v_2}, & \text{je-li } v_1 \in \mathbb{R} \text{ a } v_2 \neq 0; \\ 0, & \text{je-li } v_1 \in \mathbb{R} \text{ a } v_2 = 0. \end{cases}$$

Tedy $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \mapsto \nabla_v f(0, 0)$ není lineární zobrazení.

Úmluva

Pokud neřekneme jinak, budeme pod symbolem e_i rozumět i -tý vektor standardní báze v $\mathbb{R}^n$. Tedy

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

- Ukázali jsme si, že $v \mapsto \nabla_v \mathbf{f}(\mathbf{a})$ není obecně lineární zobrazení.
- Později však uvidíme, že pro „hezké“ funkce je $v \mapsto \nabla_v \mathbf{f}(\mathbf{a})$ lineární.
- Pokud $v \mapsto \nabla_v \mathbf{f}(\mathbf{a})$ je lineární, pak pro $v = (v_1, \dots, v_n)$ je

$$\nabla_v \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n v_i \nabla_{e_i} \mathbf{f}(\mathbf{a}).$$

Parciální derivace

Definice (parciální derivace)

Nechť $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ a a je vnitřní bod množiny D . Směrová derivace

$$\nabla_{e_i} f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a)}{t}$$

se nazývá **parciální derivace (řádu 1) funkce f v bodě a podle i -té proměnné**. Místo $\nabla_{e_i} f(a)$ píšeme $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, kde x_i označuje i -tou proměnnou funkce f , a v takovém případě často mluvíme o **parciální derivaci (řádu 1) funkce f v bodě a podle x_i** .

Má-li f parciální derivaci v nějakém bodě, pak se

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

nazývá **parciální derivace (řádu 1) funkce f podle i -té proměnné** (případně **parciální derivace (řádu 1) funkce f podle x_i**).

Parciální derivace

- Alternativní značení $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{a})$: $\partial_{x_i} \mathbf{f}(\mathbf{a})$, $\partial_i \mathbf{f}(\mathbf{a})$, $\mathbf{f}_{x_i}(\mathbf{a})$ apod.
- Existuje-li parciální derivace, pak je určena jednoznačně.
- Je-li $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ reálná funkce jedné reálné proměnné x , pak

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = f'(a).$$

- Ať $f_1, \dots, f_m$ jsou složky vektorové funkce $\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.
Potom

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \right).$$

má-li jedna ze stran rovnosti smysl.

- Je-li $\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ vektorová funkce jedné reálné proměnné x , pak místo $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}(a)$ píšeme $\mathbf{f}'(a)$ (případně $\frac{d\mathbf{f}}{dx}(a)$). Zřejmě

$$\mathbf{f}'(a) = (f'_1(a), \dots, f'_m(a)).$$

Parciální derivace

Příklad

Pro $\mathbf{f}(t) = (t, t^2)$ máme

$$\mathbf{f}'(t) = (1, 2t).$$

Příklad

Je dána funkce

$$f(x, y) = x^2 - 3y^3 + x^4y^3.$$

Potom

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 4x^3y^3,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -9y^2 + 3x^4y^2.$$

Příklad

Je-li

$$f(x, y) = \frac{e^{2x+y}}{y},$$

pak

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{2}{y}e^{2x+y}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{y-1}{y^2}e^{2x+y}.\end{aligned}$$

Parciální derivace vyšších řádů

Definice (parciální derivace vyšších řádů)

Ať $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $k \in \mathbb{N}$ a $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$. Potom **parciální derivace funkce f řádu k v bodě a podle $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$** je vektor

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}(a) := \nabla_{e_{i_k}} \dots \nabla_{e_{i_1}} f(a).$$

Existuje-li v nějakém bodě parciální derivace funkce f řádu k podle $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$, potom funkci

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} : x \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}(x)$$

nazýváme **parciální derivací funkce f řádu k podle $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$** .

Parciální derivace vyšších řádů

Terminologie a značení:

- Místo „parciální derivace řádu k “ říkáme také k -tá parciální derivace.
- ***Smíšenou parciální derivací*** rozumíme parciální derivaci, ve které derivujeme alespoň podle dvou různých proměnných.
- Místo

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}(\mathbf{a}).$$

můžeme také psát $\partial_{x_{i_k}} \dots \partial_{x_{i_1}} f(\mathbf{a})$, $f_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}(\mathbf{a})$ apod.

- Pokud se bezprostředně za sebou opakuje derivování podle jedné a téže proměnné, zápis často ještě zkracujeme. Například

$$\frac{\partial^5 f}{\partial z \partial x \partial x \partial y \partial x}(x, y, z) = \frac{\partial^5 f}{\partial z \partial x^2 \partial y \partial x}(x, y, z) = \partial_z \partial_x^2 \partial_y \partial_x f(x, y, z).$$

Parciální derivace vyšších řádů

Příklad

Je dána funkce

$$f(x, y) = e^x \sin y$$

Potom

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = e^x \sin y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -e^x \sin y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = e^x \cos y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = e^x \cos y.$$

Záměnnost parciálních derivací

Příklad

Ať

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3 - x^3y}{x^2 + y^2}, & \text{pro } (x, y) \neq 0; \\ 0, & \text{pro } (x, y) = 0. \end{cases}$$

Potom

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 1 \neq -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0).$$

Věta (Schwarzova věta)

Ať $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Jestliže existují $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ na nějakém okolí bodu $\mathbf{a}$ a jsou spojité v bodě $\mathbf{a}$, potom

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}).$$

Důkaz: Vynecháváme. 

Důležité rovnice (nejen) ve fyzice

1 *Laplaceova rovnice:*

$$\Delta u = 0,$$

kde $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ se nazývá Laplaceův operátor.

2 *Rovnice vedení tepla* (nazývaná také *rovnice difúze*):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = 0,$$

kde $k > 0$.

3 *Vlnová rovnice:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0,$$

kde $c > 0$.