

Matematická analýza 2

Diferenciál

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
martin.bohata@fel.cvut.cz

Příklad

Je dána funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Již dříve jsme ukázali, že funkce f má směrovou derivaci v bodě $(0, 0)$ podle jakéhokoli vektoru $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ a v bodě $(0, 0)$ nemá limitu (tedy není spojitá v bodě $(0, 0)$).

Tvrzení

Ať $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a je vnitřní bod množiny D a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak je ekvivalentní:

① *v bodě a existuje derivace $f'(a)$ funkce f a $f'(a) = \alpha$;*

②

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \alpha h}{|h|} = 0.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Definice (diferenciál vektorové funkce)

Ať a je vnitřní bod množiny $D \subseteq \mathbb{R}^n$ a $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$. Lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ se nazývá **diferenciál vektorové funkce f v bodě a** , jestliže

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0.$$

Diferenciál funkce f v bodě a budeme označovat symbolem $df(a)$ a jeho hodnotu v bodě h budeme označovat symbolem $df(a)(h)$. Má-li funkce f diferenciál v bodě a , potom říkáme, že f je **diferencovatelná v bodě a** .

- Platí

$$df(a)(h) = (df_1(a)(h), \dots, df_m(a)(h)),$$

má-li jedna ze stran rovnosti smysl.

Ať $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je diferencovatelná v bodě a . Položme

$$\omega(h) = \begin{cases} \frac{f(a+h) - f(a) - df(a)(h)}{\|h\|}, & \text{je-li } a + h \in D \setminus \{a\}; \\ 0, & \text{je-li } h = 0. \end{cases}$$

- Existuje okolí $U(0)$ ležící v definičním oboru funkce ω .
- $\lim_{h \rightarrow 0} \omega(h) = 0 = \omega(0)$.
- Pro každé $h \in \mathbb{R}^n$ splňující $a + h \in D$ je

$$f(a + h) = f(a) + df(a)(h) + \|h\| \omega(h).$$

- Pokud h je blízko 0 , pak

$$f(a + h) \approx f(a) + df(a)(h).$$

Příklad

Nechť $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$ a vektorová funkce $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je dána předpisem $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$. Potom pro každé $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ je

$$d\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{0},$$

kde $\mathbf{0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je identicky nulové zobrazení.

Příklad

Nechť $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je lineární zobrazení. Potom pro každé $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ je

$$d\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{f}.$$

Definice (gradient a Jacobiho matice)

- ① Jestliže $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má všechny parciální derivace (1. řádu) v bodě $\mathbf{a}$, potom vektor

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right)$$

se nazývá **gradient funkce f v bodě $\mathbf{a}$** . Místo $\nabla f(\mathbf{a})$ se také často píše $\text{grad } f(\mathbf{a})$.

- ② Jestliže složky $f_1, \dots, f_m$ vektorové funkce $\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mají v bodě $\mathbf{a}$ všechny parciální derivace (1. řádu), potom $m \times n$ matice

$$\mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

se nazývá **Jacobiho matice funkce $\mathbf{f}$ v bodě $\mathbf{a}$** .

Věta (souvislost diferenciálu a směrové derivace)

Jestliže $f_1, \dots, f_m$ jsou složky vektorové funkce $\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferencovatelné v bodě $\mathbf{a}$, potom pro každé $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ existuje $\nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{f}(\mathbf{a})$ a

$$d\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = \nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{f}(\mathbf{a}) = (\mathbf{h} \cdot \nabla f_1(\mathbf{a}), \dots, \mathbf{h} \cdot \nabla f_m(\mathbf{a})).$$

V takovém případě můžeme s využitím sloupcového zápisu vektorů psát

$$d\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = \nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{a})\mathbf{h}.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

- Pokud diferenciál vektorové funkce existuje, je určen jednoznačně.
- Je-li funkce $\mathbf{f}$ diferencovatelná v bodě $\mathbf{a}$, pak zobrazení $\mathbf{v} \mapsto \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{f}(\mathbf{a})$ je nutně lineární.

Tvrzení (spojitost diferencovatelné funkce)

Jestliže vektorová funkce f je diferencovatelná v a , pak je v a spojitá.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Věta (postačující podmínka existence diferenciálu)

Jestliže vektorová funkce f má na okolí bodu a spojitě všechny parciální derivace (1. řádu), pak je v bodě a diferencovatelná.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Reprezentace diferenciálu

Příklad

Je dána funkce

$$f(x, y) = x^2 - 2y^2.$$

Tato funkce je diferencovatelná a

$$df(x, y)(h, k) = 2xh - 4yk.$$

Příklad

Mějme vektorovou funkci

$$\mathbf{f}(x, y) = (x - e^y, x^2 + y).$$

Ta je diferencovatelná v každém bodě a

$$d\mathbf{f}(x, y)(h, k) = \begin{pmatrix} 1 & -e^y \\ 2x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h - ke^y \\ 2xh + k \end{pmatrix}.$$

Poznámka k zápisu diferenciálu ve fyzice a inženýrství

Ve fyzice se diferenciál reálné funkce f v bodě $\mathbf{a}$ často píše ve tvaru

$$df(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a})dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})dx_n.$$

Jaký význam mají symboly $dx_1, \dots, dx_n$?

- Připomeňme, že i -tá souřadnicová projekce je funkce $\sigma_i(\mathbf{a}) = a_i$. Místo σ_i píšme x_i .
- Potom pro každé $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ máme

$$df(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a})dx_1(\mathbf{a})(\mathbf{h}) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})dx_n(\mathbf{a})(\mathbf{h}).$$

- Protože $dx_i(\mathbf{a})$ nezávisí na $\mathbf{a}$, píšeme jen dx_i místo $dx_i(\mathbf{a})$. S touto konvencí obdržíme

$$df(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a})dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})dx_n.$$

Směry největšího růstu a poklesu

Tvrzení (směry největšího růstu a poklesu)

Nechť $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $\mathbf{a}$.

① Je-li $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ jednotkový vektor, potom

$$\nabla_{\mathbf{h}} f(\mathbf{a}) \in [-\|\nabla f(\mathbf{a})\|, \|\nabla f(\mathbf{a})\|].$$

② Je-li $\nabla f(\mathbf{a}) \neq 0$ a $\mathbf{h} = \frac{\nabla f(\mathbf{a})}{\|\nabla f(\mathbf{a})\|}$, potom $\nabla_{\mathbf{h}} f(\mathbf{a}) = \|\nabla f(\mathbf{a})\|$.

③ Je-li $\nabla f(\mathbf{a}) \neq 0$ a $\mathbf{h} = -\frac{\nabla f(\mathbf{a})}{\|\nabla f(\mathbf{a})\|}$, potom $\nabla_{\mathbf{h}} f(\mathbf{a}) = -\|\nabla f(\mathbf{a})\|$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Ať $\nabla f(\mathbf{a}) \neq 0$.

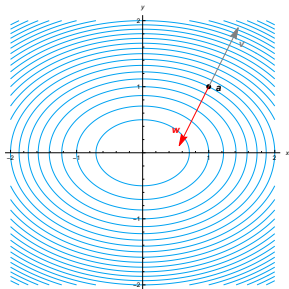
- $\nabla f(\mathbf{a})$... udává směr největšího růstu funkce f v bodě $\mathbf{a}$.
- $-\nabla f(\mathbf{a})$... udává směr největšího poklesu funkce f v bodě $\mathbf{a}$.

Směry největšího růstu a poklesu

Příklad

Je dána funkce $f(x, y) = x^2 + 2y^2$.

- Jednotkový vektor udávající směr největšího růstu funkce f v bodě $\mathbf{a} = (1, 1)$ je $\mathbf{v} = \frac{\nabla f(\mathbf{a})}{\|\nabla f(\mathbf{a})\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.
- Jednotkový vektor udávající směr největšího poklesu f v bodě $\mathbf{a} = (1, 1)$ je $\mathbf{w} = -\frac{\nabla f(\mathbf{a})}{\|\nabla f(\mathbf{a})\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.



Tečná nadrovina

Definice (tečná nadrovina)

Nechť $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $\mathbf{a}$. **Tečná nadrovina ke grafu funkce f v bodě $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$** je množina

$$\{(\mathbf{x}, x_{n+1}) \mid x_{n+1} = f(\mathbf{a}) + (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \nabla f(\mathbf{a})\}.$$

Pro každé $\alpha \neq 0$ se vektor

$$\alpha (\nabla f(\mathbf{a}), -1) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

nazývá **normálový vektor ke grafu funkce f v bodě $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$** .

Speciální případy:

- $n = 1$... **tečna** (případně **tečná přímka**).
- $n = 2$... **tečná rovina**.

Tečná nadrovina

Tečná nadrovina ke grafu funkce v bodě $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$ je graf afinní funkce

$$g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \nabla f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a}) + df(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

Je-li $\mathbf{x}$ blízko bodu $\mathbf{a}$, pak můžeme psát

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{a}) + (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \nabla f(\mathbf{a}).$$

Příklad

Hledejme tečnou rovinu ke grafu funkce

$$f(x, y) = x \operatorname{arctg}(xy^2).$$

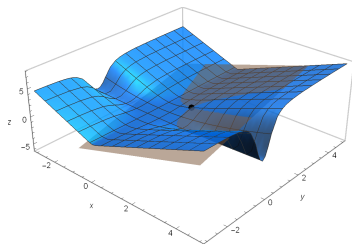
v bodě $(1, 1, \frac{\pi}{4})$ a přibližnou hodnotu čísla $f\left(\frac{11}{10}, \frac{19}{20}\right)$.

Tečná nadrovina

Příklad (pokračování)

Tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $(1, 1, \frac{\pi}{4})$ má rovnici

$$z = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi + 2}{4}(x - 1) + (y - 1).$$



Díky tomu $f\left(\frac{11}{10}, \frac{19}{20}\right) \approx \frac{11}{40}\pi$.

Věta (o derivaci složeného zobrazení)

Ať $f : E \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ je diferencovatelná v bodě b a $g : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je diferencovatelná v bodě a . Jestliže $g(a) = b$, potom funkce $h = f \circ g$ je diferencovatelná v bodě a a platí

$$dh(a) = df(b) \circ dg(a).$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

V řeči Jacobiho matic lze závěr předchozí věty formulovat ve tvaru

$$J_h(a) = J_f(b) J_g(a).$$

Důsledek (řetízkové pravidlo)

Ať $f : E \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $\mathbf{b}$ a $\mathbf{g} : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je diferencovatelná v bodě $\mathbf{a}$. Jestliže $\mathbf{g}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ a $h = f \circ \mathbf{g}$, potom pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ je

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{b}) \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(\mathbf{b}) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\mathbf{a}).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

V případě $n = 1$ se řetízkové pravidlo redukuje na

$$h'(a) = \nabla f(\mathbf{b}) \cdot \mathbf{g}'(a) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(\mathbf{b}) g'_j(a).$$

Derivace složeného zobrazení

Příklad

Nechť $f(u, v) = uv^2$ a $g(x, y) = (x \cos y, x + 2y)$. Z řetízkového pravidla pro $h = f \circ g$ obdržíme

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = (x + 2y)^2 \cos y + 2(x + 2y)x \cos y$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = -(x + 2y)^2 x \sin y + 4(x + 2y)x \cos y.$$

Příklad

Mějme dánu spojitě diferencovatelnou funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Potom funkce $g(x, y) = f(xy)$ je řešením rovnice

$$x \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - y \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0$$

na $\mathbb{R}^2$.

Aplikace diferenciálu – linearizace soustavy ODR

Ať $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ má spojité parciální derivace (prvního řádu) na Ω . Uvažme soustavu diferenciálních rovnic tvaru

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$$

Nechť $\mathbf{a} \in \Omega$ je *ekvilibrium* dané soustavy (tj. $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$). Protože pro každý bod $\mathbf{x}$ blízko bodu $\mathbf{a}$ můžeme psát

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) (\mathbf{x} - \mathbf{a}),$$

je

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) (\mathbf{x}(t) - \mathbf{a}).$$

Uvážíme-li substituci $\mathbf{u}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{a}$, dostaneme

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) \mathbf{u}(t).$$

Tato soustava se nazývá **linearizací** soustavy $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ v bodě $\mathbf{a}$.

Příklad

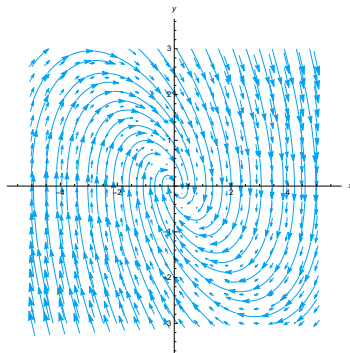
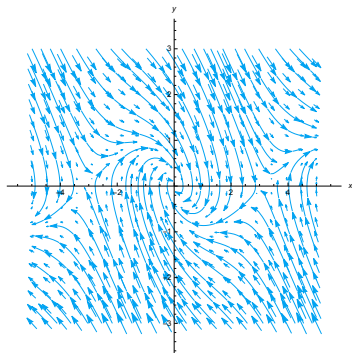
Uvažujme rovnici

$$\begin{aligned}x' &= y, \\ y' &= -y - \sin x.\end{aligned}$$

Linearizace této soustavy v bodě $(0, 0)$ je

$$\begin{aligned}x' &= y, \\ y' &= -y - x.\end{aligned}$$

Příklad (pokračování)



Příklad (pokračování)

Linearizace v bodě $(\pi, 0)$ je

$$\begin{aligned}x' &= y, \\y' &= -y + x.\end{aligned}$$

