

Úvod

Zadání

1. Nalezněte rovnici roviny s normálovým vektorem $(-1, 2, 1)$, která obsahuje bod $(1, 2, 1)$.
2. Který z bodů $\mathbf{a} = (3, 1, -2)$ a $\mathbf{b} = (2, 3, 1)$ je nejbližší rovině popsané rovnicí $x - y = 0$?
3. Jsou dány vektory $\mathbf{a} = (2, 3, 0)$ a $\mathbf{b} = (1, 0, 3)$. Nalezněte $\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\|\mathbf{v}\|$ a ukažte, že $\mathbf{v} \perp \mathbf{a}, \mathbf{b}$.
4. Ukažte, že neplatí $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ pro všechna $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$.
5. V rovině jsou dány vektory $\mathbf{u} = (2, 0)^T$ a $\mathbf{v} = (0, 1)^T$ (v této úloze budeme psát vektory v $\mathbb{R}^2$ do sloupce). Ať $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Nalezněte obsah S_1 rovnoběžníku daného vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ a obsah S_2 rovnoběžníku daného vektory $\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{v}$.
6. Nalezněte rovnici roviny, která je kolmá na rovinu o rovnici $2x - 3y + 2z = 5$ a která obsahuje průnik rovin popsaných rovnicemi $x + 2y = 1$ a $x + y - z = 3$.
7. Určete všechny hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby úhel mezi rovinami o rovnicích $y + z = 3$ a $-x + \alpha y + z = 9$ byl $\frac{\pi}{6}$.
8. Ať $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Ukažte, že $||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|| \leq |\mathbf{x} \pm \mathbf{y}|$.
9. Popište a načrtněte množinu M , jestliže
 - (a) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq 1 - x^2\}$;
 - (b) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 4x + 6y \leq 3\}$;
 - (c) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$;
 - (d) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - 4y^2 - z = 0\}$;
 - (e) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + y^2 + z^2 - 24x - 8y + 4z + 55 = 0\}$;
 - (f) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.
10. Nalezněte střed a poloměr sféry o rovnici
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z = 15.$$
11. Nalezněte, pokud existuje, limitu posloupnosti $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{+\infty}$, jestliže
 - (a) $\mathbf{x}_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{k-3k^2}{k+k^2}\right)$;
 - (b) $\mathbf{x}_k = (1, \sin(\pi k), k)$;
 - (c) $\mathbf{x}_k = \left(k - \sqrt{k^2 + k}, \sqrt[k]{k}, \frac{1}{k}\right)$;
 - (d) $\mathbf{x}_k = \left(\frac{\sin k}{k}, k \sin \frac{1}{k}\right)$.

12. Rozhodněte, zda je množina M otevřená nebo uzavřená a nalezněte její vnitřek, hranici, uzávěr, hromadné body a izolované body, jestliže

(a) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 1\};$

(b) M je přímka v rovině (např. $M = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$);

(c) $M = \{(\frac{1}{n}, 0) \mid n \in \mathbb{N}\};$

(d) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(2, 0)\};$

(e) $M = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in (0, 1), \varphi \in [0, 2\pi], z \in (0, 1)\}.$

13. Nalezněte všechny hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y > x + \alpha\}$$

byla uzavřená množina.

Výsledky

1. $-x + 2y + z - 4 = 0$.
2. Bod $\mathbf{b}$.
3. $\mathbf{v} = (9, -6, -3)$, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{126}$.
4. Stačí položit například $\mathbf{u} = \mathbf{v} = (1, 0, 0)$ a $\mathbf{w} = (0, 1, 0)$.
5. $S_1 = 2$ a $S_2 = 2 \det \mathbf{A} = 4$.
6. $x - 2y - 4z = 9$.
7. $\alpha = 2$.
9. (a) Množina ležící mezi dvěma parabolami $y = 1 - x^2$ a $y = x^2 - 1$;
(b) Kruh se středem $\mathbf{S} = (2, 3)$ a poloměrem $R = 4$;
(c) Čtyřstěn s vrcholy $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$;
(d) Hyperbolický paraboloid;
(e) Elipsoid;
(f) Množina ležící mezi dvěma sférami se středem v počátku. První sféra má poloměr 1 a druhá má poloměr 2.
10. $S = (1, 2, -4)$ a $R = 6$.
11. (a) $(0, -3)$.
(b) limita neexistuje.
(c) $(-1, 1, 0)$.
(d) $(0, 1)$.
12. (a) Otevřená, $\text{int}(M) = M$,

$$\begin{aligned}\partial M &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1\}, \\ \overline{M} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 1\},\end{aligned}$$

hromadné body jsou všechny body množiny $\overline{M}$, M nemá žádné izolované body.

- (b) Uzavřená, $\text{int}(M) = \emptyset$, $\partial M = M$, $\overline{M} = M$, hromadné body jsou všechny body množiny M , M nemá žádné izolované body.
- (c) Není otevřená ani uzavřená, $\text{int}(M) = \emptyset$, $\partial M = \overline{M} = M \cup \{(0, 0)\}$, jediný hromadný bod je $(0, 0)$, izolované body jsou všechny body množiny M .
- (d) Není otevřená ani uzavřená,

$$\begin{aligned}\text{int}(M) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}, \\ \partial M &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0, 0), (2, 0)\},\end{aligned}$$

$\overline{M} = M \cup \{(0, 0)\}$, hromadné body jsou všechny body množiny

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\},$$

jediný izolovaný bod je $(2, 0)$.

(e) Otevřená, $\text{int}(M) = M$, $\partial M = N_1 \cup N_2$, kde

$$N_1 = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in \{0, 1\}, \varphi \in [0, 2\pi], z \in (0, 1)\},$$

$$N_2 = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in [0, 1], \varphi \in [0, 2\pi], z \in \{0, 1\}\}.$$

Dále $\overline{M} = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in [0, 1], \varphi \in [0, 2\pi], z \in [0, 1]\}$, hromadné body jsou všechny body množiny $\overline{M}$, M nemá žádné izolované body.

13. $\alpha \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup [\sqrt{2}, +\infty)$.