

Funkce

Zadání

1. Nalezněte definiční obor funkce

(a) $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2};$

(b) $f(x, y) = \frac{\ln(x^2y)}{\sqrt{|y-x|}};$

(c) $f(x, y) = \sqrt{3x+y+1} - \frac{1}{\sqrt{2y-x}};$

(d) $f(x, y) = \sqrt{1+xy^2};$

(e) $f(x, y) = \sqrt{y \sin x}.$

2. Načrtněte graf funkce

(a) $f(x, y) = |y|;$

(b) $f(x, y) = y^2 - 2xy - 3y;$

(c) $f(x, y) = \max\{|x|, |y|\}.$

3. Načrtněte hladinu funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ výšky 1.

4. Je dána funkce $f(x, y) = 9x^2 + y^2$. Načrtněte

(a) $\text{lev}(f; \alpha)$ pro hodnoty $\alpha = 0, 1, 9;$

(b) průnik grafu f s rovinou $x = 1;$

(c) průnik grafu f s rovinou $y = 0;$

(d) graf funkce f .

5. Nalezněte definiční obor D a obor hodnot funkce $f(x, y) = \frac{\sqrt{y-x^2}}{1-x^2}.$

6. Nalezněte definiční obor D a hladinu výšky 1 funkce $f(x, y) = \frac{1}{\sin(\pi(x+y))}.$

7. Určete definiční obor D a načrtněte graf funkce $f(x, y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$. Dále určete hladiny výšky $c \geq 0$ funkce f .

8. Nalezněte všechny hodnoty $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby $\text{lev}(f; \alpha) \neq \emptyset$, je-li

$$f(x, y, z) = x^4 - 2x^2 + y^2 + 2z^2 - 6y + 4z.$$

9. Nalezněte definiční obor D , obor hodnot a hladiny výšky $c \in f(D)$ funkce f , jestliže

(a) $f(x, y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1};$

(b) $f(x, y) = \ln(x-y);$

(c) $f(x, y) = xy;$

(d) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 - 2x + 2y^2 + 4y + z^2 + 2};$

(e) $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

10. Nalezněte $\alpha > 0$ tak, aby $\text{lev}(f; \alpha)$ byla kružnice s poloměrem 1, jestliže

$$f(x, y) = \sqrt{2x^2 + y^2} - x.$$

11. Nalezněte $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tak, aby $\text{lev}(f; 17)$ byla sféra procházející bodem $(-1, 2, 3)$, jestliže

$$f(x, y, z) = x^2 + \alpha y^2 + z^2 - 2\beta y - 4z + 7.$$

12. Nalezněte definiční obor vektorové funkce

$$\mathbf{f}(x, y) = \left(\sqrt{1 - x^2}, \ln(x^2 - y^2), \sin x \cos y \right).$$

13. Určete definiční obor vektorového pole

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

Dále znázorněte $\mathbf{F}(x, y)$ v rovině.

14. Je dána vektorová funkce

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \left(\arctg y, \frac{\ln z}{x} \right).$$

Určete její definiční obor D a obor hodnot. Dále nalezněte množinu $\mathbf{f}^{-1}((0, 0))$ všech vzorů bodu $(0, 0)$ při zobrazení $\mathbf{f}$.

Výsledky

1. (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq \pm x\}$;
 (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, y > 0, y \neq x\}$;
 (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq -3x - 1, y > \frac{x}{2}\}$;
 (d) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0, |y| \leq \frac{1}{\sqrt{-x}}\right\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$;
 (e)

$$\left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi] \times [0, \infty)\right) \cup \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [(2k-1)\pi, 2k\pi] \times (-\infty, 0]\right).$$

5. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq \pm 1, y \geq x^2\}$, $f(D) = \mathbb{R}$.
6. $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, -x + k) \mid x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}\}$, $\text{lev}(f; 1) = \{(x, -x + \frac{1}{2} + 2k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
7. $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$, $\text{lev}(f; c) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 9 - c^2\}$ pro $c \in [0, 3]$
 a $\text{lev}(f; c) = \emptyset$ pro $c > 3$.
8. $\alpha \in [-12, \infty)$.
9. (a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y + 1 \geq 0, x \neq 1\}$, $f(D) = \mathbb{R}$ a

$$\text{lev}(f; c) = \begin{cases} \{(x, -x - 1) \mid x \neq 1\} & \text{pro } c = 0, \\ \{(x, c^2 x^2 - (2c^2 + 1)x + c^2 - 1) \mid x > 1\} & \text{pro } c > 0, \\ \{(x, c^2 x^2 - (2c^2 + 1)x + c^2 - 1) \mid x < 1\} & \text{pro } c < 0; \end{cases}$$

- (b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$, $f(D) = \mathbb{R}$ a

$$\text{lev}(f; c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x - e^c\};$$

- (c) $D = \mathbb{R}^2$, $f(D) = \mathbb{R}$ a

$$\text{lev}(f; c) = \begin{cases} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{c}{x}\} & \text{pro } c \neq 0, \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\} & \text{pro } c = 0; \end{cases}$$

- (d) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + 2(y+1)^2 + z^2 \geq 1\}$, $f(D) = [0, +\infty)$ a
 pro $c \in f(D)$ je

$$\text{lev}(f; c) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + 2(y+1)^2 + z^2 = c^2 + 1\};$$

- (e) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 > 0\}$, $f(D) = (0, +\infty)$ a pro $c \in (0, +\infty)$
 je

$$\text{lev}(f; c) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{c^2}\right\}.$$

10. $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

11. $\alpha = 1$ a $\beta = -2$.

12. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| < |x| \leq 1\}$.

13. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

14. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0, z > 0\}$, $\mathbf{f}(D) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R}$ a $\mathbf{f}^{-1}((0, 0)) = \{(x, 0, 1) \mid x \neq 0\}$.