

Limita a spojitost

Zadání

1. Rozhodněte, zda uvedené limity existují a pokud ano, tak je vypočtěte.

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{xy-y}{(x-1)^2+y^2};$$

$$(b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2};$$

$$(c) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{yz+xy}{x^2+y^2+z^2};$$

$$(d) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz^2}{x^2+y^2+z^2};$$

$$(e) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \sin^2 y}{x^2+y^2};$$

$$(f) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}.$$

2. Rozhodněte, zda je funkce f spojitá, jestliže

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y+xy^2}{x^2-y^2}, & x^2 \neq y^2, \\ 0, & x^2 = y^2; \end{cases}$$

$$(b) f(x, y) = \begin{cases} xe^{\frac{x}{y}}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0; \end{cases}$$

$$(c) f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{xy}, & xy \neq 0, \\ 1, & xy = 0. \end{cases}$$

3. Určete konstantu $k \in \mathbb{R}$ tak, aby funkce f byla spojitá, jestliže

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y-1}{\sqrt{x-y}-1}, & x \geq y \text{ a } y \neq x-1, \\ k, & (x, y) = (2, 1); \end{cases}$$

$$(b) f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4+x^2+y^2}-2}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ k, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

4. Určete funkci g tak, aby funkce f byla spojitá, jestliže

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y-xy^2}{x-y}, & x \neq y, \\ g(x), & x = y; \end{cases}$$

$$(b) f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{y}, & y \neq 0, \\ g(x), & y = 0. \end{cases}$$

5. Ať $f(x, y) = d(x)d(y)$, kde $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je Dirichletova funkce (tj. $d = \chi_{\mathbb{Q}}$, neboli $d(x) = 1$ pro $x \in \mathbb{Q}$ a $d(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

(a) Ukažte, že f není spojitá v bodě $(1, 1)$;

(b) Ukažte, že $f|_{\mathbb{Q}^2}$ je spojitá v bodě $(1, 1)$.

Výsledky

1. (a) neexistuje;
(b) 0;
(c) neexistuje;
(d) 0;
(e) 0;
(f) 2.
2. (a) není (v bodě $(0,0)$ limita neexistuje);
(b) není (v bodě $(0,0)$ limita neexistuje);
(c) je.
3. (a) 2;
(b) $\frac{1}{4}$.
4. (a) x^2 ;
(b) x .