

Cvičení – Komplexní analýza 2026/2027
Cvičení 5

Úloha 1. Rozviňte funkci $f(z)$ do mocninné řady se středem v z_0 a určete parametry jejího kruhu konvergence.

(a) $f(z) = \frac{1}{(z+6)^3}$, $z_0 = -4$

(b) $f(z) = (z-2)^4 e^{3z}$, $z_0 = 2$

Úloha 2. Laurentova řada

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z+4)^n$$

má vnitřní poloměr konvergence $r = 3$ a vnější $R = 9$. Konverguje v bodě $z = -6$?

Úloha 3. Rozviňte funkci

$$f(z) = \frac{1}{(z+5)(z-3)^4(z^2+2z-15)^2}$$

do Laurentovy řady na maximálním prstencovém okolí bodu $z_0 = 3$ a určete jeho parametry.

Úloha 4. Klasifikujte typ izolované singularity funkce $f(z)$ v bodě z_0 , je-li

(a) $z_0 = i$ a

$$f(z) = \frac{2}{(z-i)^3} + \frac{1}{z-i} + \sum_{n=-5}^{\infty} (n+3)(z-i)^{2n+7}, \quad z \in P(i);$$

(b) $z_0 = 1$ a

$$f(z) = \frac{\ln z}{(z-1)^4}, \quad z \in P(1).$$

$$[\text{Mohl by se hodit známý rozvoj } \ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n \text{ pro } |z-1| < 1]$$

Úloha 5. Určete koeficient $\alpha \in \mathbb{C}$ a exponent $k \in \mathbb{Z}$ tak, aby funkce

$$f(z) = \frac{\alpha}{(z-1)^k} + \frac{7}{3(z-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^{n-3}}{3^n}, \quad z \in P(1),$$

měla v bodě 1 jednoduchý pól.

Úloha 6. Klasifikujte všechny izolované singularity funkce $f(z)$, kde

(a) $f(z) = \frac{\sin z + z - \pi}{z^2(z-\pi)^4}$

(b) $f(z) = \frac{(e^z-1)(1-\cos z)^4}{z^{11}}$

(c) $f(z) = \frac{(z-\sin z)(1-\cos z)}{z^7(1-e^{iz})^2}$

(d) $f(z) = \frac{e^{iz} - i - \cos z}{(1-\sin z)^2(z-\frac{\pi}{2})}$

Pro nudící se

Úloha 7. Rozviňte funkci $f(z) = \frac{(z+1)^5}{z^2+z-2}$ do mocninné řady se středem v -1 a určete parametry jejího kruhu konvergence.

Úloha 8. Rozviňte funkci $f(z) = \frac{1}{z^2+z-2}$ do Laurentovy řady na mezikruží $P(0; 1; 2)$.

Úloha 9. O funkci $f(z)$ víme, že má v bodě i pól řádu 1. Dále o ní víme, že splňuje $(z-i)f(z)|_{z=i} = 5i$ a $(z-i)f(z)|_{z=0} = -3$. Klasifikujte typ izolované singularity funkce $g(z) = f(z) + 3 + z^2 - \frac{5i}{z-i}$, $z \in P(i)$, v bodě i .

Mocninné řady

Připomenutí.

- Známé součty/rozvoje, které bychom měli bezpečně znát:
 - ★ (geometrická řada:) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ pro $|z| < 1$;
 - ★ (rozvoj exponenciály:) $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ pro libovolné $z \in \mathbb{C}$.
- Jednoduché parciální zlomky (tj. s lineárním polynomem ve jmenovateli) rozvíjíme pomocí známého součtu geometrické řady.
- Správný střed si vyrobíme přepsáním $z = (z - z_0) + z_0$.
- Parciální zlomky odpovídající vyšší násobnosti kořene převedeme na jednoduché, které umíme rozvinout, pomocí integrování. Následně derivujeme, abychom získali požadovaný rozvoj.

Laurentovy řady

Připomenutí.

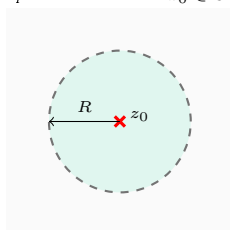
- Laurentova řada je řada tvaru

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

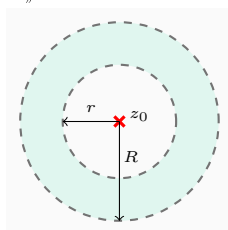
kde $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ je daná číselná posloupnost (tzv. **koefficienty Laurentovy řady**), z je proměnná a z_0 je pevně dané číslo (tzv. **střed Laurentovy řady**).

- Na rozdíl od mocninných řad Laurentova řada může obsahovat i záporné mocniny $(z - z_0)$.
- Laurentovy řady konvergují na mezikružích.
 - ★ $P(z_0; r; R)$, kde z_0 je střed, r je vnitřní poloměr a R je vnější poloměr.

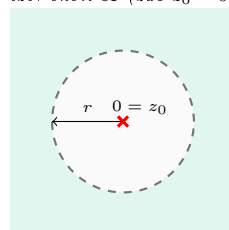
$0 = r < R \leq \infty$
prstencové okolí $z_0 \in \mathbb{C}$



$0 < r < R < \infty$
„skutečné mezikružší“



$0 \leq r < R = \infty$
tzv. okolí ∞ (zde $z_0 = 0$)



- Při rozvoji racionální funkce do Laurentovy řady na prstencovém okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ postupujeme stejně jako u mocninných řad.

Klasifikace izolovaných singularit (pomocí Laurentova rozvoje)

Připomenutí.

- Nechť $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ je Laurentův rozvoj funkce f na prstencovém okolí izolované singularity $z_0 \in \mathbb{C}$. Rozlišujeme tři typy izolovaných singularit.
 - (1) Pokud $a_n = 0$ pro každé $n < 0$, pak z_0 je **odstranitelná singularity**.
 - ★ $f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$ na prstencovém okolí z_0
 - (2) Pokud $a_{-k} \neq 0$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ a $a_n = 0$ pro každé $n < -k$, pak z_0 je **pól řádu k**.
 - ★ $f(z) = \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$ na prstencovém okolí z_0 , kde $a_{-k} \neq 0$
 - (3) Pokud $a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho $n < 0$, pak z_0 je **podstatná singularity**.
- Máme-li k dispozici Laurentův rozvoj (na správném prstencovém okolí!), vyčteme typ izolované singularity z rozvoje.
- Pokud ne, často se hodí následující pravidlo. Uvažme funkci $f = \frac{g}{h}$, přičemž g má v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ kořen násobnosti $k \in \mathbb{N}_0$ a h má v bodě z_0 kořen násobnosti $l \in \mathbb{N}$. Potom f má v z_0 :
 - ★ odstranitelnou singularity, pokud $k \geq l$;
 - ★ pól řádu $l - k$, pokud $k < l$.
- Funkce $f \neq 0$, která je holomorfní na okolí $z_0 \in \mathbb{C}$, má v z_0 **kořen násobnosti** $k \in \mathbb{N}_0$, pokud $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ a $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.
 - ★ Polynom $(z - z_0)^k$, $k \in \mathbb{N}$, má v bodě z_0 kořen násobnosti k .
- Má-li funkce f v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ kořen násobnosti k a g násobnosti l , potom funkce $f(z)g(z)$ má v bodě z_0 kořen násobnosti $k + l$.

Výsledky

Úloha 1: (a) $f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+2}} n(n-1)(z+4)^{n-2}$ pro $|z+4| < 2$ (tj. $R=2$)

(b) $f(z) = e^6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (z-2)^{n+4}}{n!}$ pro každé $z \in \mathbb{C}$ (tj. $R=\infty$)

Úloha 2: Ne.

Úloha 3: $f(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^{n+1}} n(n-1)(z-3)^{n-8}$ pro $0 < |z-3| < 8$ (tj. $r=0$ a $R=8$)

Úloha 4: (a) Odstranitelná singularita.

(b) Pól řádu 3.

Úloha 5: $k=2$, $a=-\frac{8}{3}$

Úloha 6: (a) Izolované singularity jsou body 0 a π . Bod 0 je pól řádu 2. Bod π je pól řádu 1.

(b) Jediná izolovaná singularita je bod 0. Bod 0 je pól řádu 2.

(c) Izolované singularity jsou body $2k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$. Body $2k\pi$ pro $k \neq 0$ jsou odstranitelné singularity. Bod 0 je pól řádu 4.

(d) Izolované singularity jsou body $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$. Body $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ pro $k \neq 0$ jsou póly řádu 2. Bod $\frac{\pi}{2}$ je pól řádu 3.

Úloha 7: $f(z) = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z+1)^{n+5} - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^{n+5}}{2^{n+1}}$ pro $|z+1| < 1$ (tj. $R=1$)

Úloha 8: $f(z) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n$ pro $1 < |z| < 2$

Úloha 9: Odstranitelná singularita.