

1. semestrální test (varianta A)

Identifikační číslo: 1

Jméno:

Čas: 25 minut · Nutné minimum: 6 bodů · Pomůcky: pouze psací potřeby
Odpovědi zdůvodněte!

Úloha 1 (2 body)

Nalezněte reálnou a imaginární část čísla $c = \frac{1+i}{1+i^7}$.

Úloha 2 (2 body)

Nalezněte všechna řešení rovnice $e^{z+1} = i$.

Úloha 3 (3 body)

Z definice vypočtěte křivkový integrál

$$\int_C z^3 - 3\bar{z} \, dz,$$

kde C je půlkružnice $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$ s počátečním bodem $-i$ a koncovým bodem i .

Úloha 4 (3 body)

Nalezněte rozvoj funkce $f(z) = \frac{1}{z^2}$ do mocninné řady na co největším okolí bodu $1 - i$ a určete poloměr tohoto okolí.

1. semestrální test (varianta B)

Identifikační číslo: 1

Jméno:

Čas: 25 minut · **Nutné minimum: 6 bodů** · **Pomůcky: pouze psací potřeby**
Odpovědi zdůvodněte!

Úloha 1 (2 body)

Nalezněte goniometrický tvar komplexního čísla $c = \sin i$.

Úloha 2 (2 body)

Ať $f(z)$ je součtem řady $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n+1} (z-1)^n$ na nějakém $U(1)$. Nalezněte koeficient a_2 v rozvoji $(z-1)f'(z)$ do mocninné řady se středem 1.

Úloha 3 (3 body)

Rozhodněte, zda je funkce $f(z) = \frac{\operatorname{Im} z}{1-i\operatorname{Re} z}$ diferencovatelná v bodě $z = i$.

Úloha 4 (3 body)

Nalezněte rozvoj funkce $f(z) = \frac{1}{z^2+2z}$ do Laurentovy řady na co největším okolí nekonečna a toto okolí určete.

2. semestrální test (varianta A)

Identifikační číslo: 1

Jméno:

Čas: 25 minut · **Nutné minimum: 6 bodů** · **Pomůcky: pouze psací potřeby**
Odpovědi zdůvodněte!

Úloha 1 (2 body)

Určete typ izolované singularity funkce $f(z) = \frac{1+\cos(\pi z)}{(z-1)^3}$ v bodě 1.

Úloha 2 (2 body)

Víme, že $F(z) = \frac{z^2+z}{(z-1)^3}$ je Z -transformace posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{+\infty} = (n^2)_{n=0}^{+\infty}$. Určete $\mathcal{Z}[a_{n+1}](z)$.

Úloha 3 (3 body)

Vypočtete

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{x^2 - 4x + 5} dx.$$

Úloha 4 (3 body)

Nalezněte Laplaceův vzor $f(t)$ funkce

$$F(s) = \frac{1}{s^3 - s}.$$

2. semestrální test (varianta B)

Identifikační číslo: 1

Jméno:

Čas: 25 minut · **Nutné minimum: 6 bodů** · **Pomůcky: pouze psací potřeby**
Odpovědi zdůvodněte!

Úloha 1 (2 body)

Vypočtěte reziduum funkce $f(z) = \frac{\sin z}{z^3 + 2z^2}$ v bodě 0.

Úloha 2 (2 body)

Nalezněte Laplaceovu transformaci $F(s)$ funkce $f(t) = e^t (\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - 1))$.

Úloha 3 (3 body)

Vypočtěte

$$\int_C \frac{\cos(\pi z)}{z^3 + z^2 - 2z} dz,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z - 1| = 2$.

Úloha 4 (3 body)

Je dána posloupnost $(a_n)_{n=0}^{+\infty}$, kde

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{jestliže } n \text{ je sudé;} \\ 2^n, & \text{jestliže } n \text{ je liché.} \end{cases}$$

Nalezněte Z -transformaci posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{+\infty}$.

Stručná řešení

1. semestrální test (varianta A)

Úloha 1

Protože

$$c = \frac{1+i}{1-i} \frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{2} = i,$$

je $\operatorname{Re} c = 0$ a $\operatorname{Im} c = 1$.

Úloha 2

Rovnici můžeme ekvivalentně přepsat na $e^{z+1} = e^{i\frac{\pi}{2}}$. Odtud $z = -1 + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Úloha 3

Parametrizace křivky C je například $\varphi(t) = e^{it}$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Tedy

$$\int_C z^3 - 3\bar{z} dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (e^{3it} - 3e^{-it}) i e^{it} dt = i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{4it} - 3 dt = -3i\pi.$$

Úloha 4

Protože

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-1+i) + 1-i} = \frac{1}{1-i} \frac{1}{1 + \frac{z-1+i}{1-i}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1-i)^{n+1}} (z-1+i)^n$$

pro $|z-1+i| < \sqrt{2}$, je

$$\frac{1}{z^2} = -\left(\frac{1}{z}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(1-i)^{n+1}} (z-1+i)^{n-1}$$

pro $|z-1+i| < \sqrt{2}$.

1. semestrální test (varianta B)

Úloha 1

Protože $c = \frac{e^{-1}-e}{2i} = \frac{e^2-1}{2e}i$, je

$$c = \frac{e^2-1}{2e} e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Úloha 2

Derivováním mocninné řady člen po členu dostaneme na $U(1)$ rovnost

$$(z-1)f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n}{n+1} (z-1)^n.$$

Tedy $a_2 = \frac{8}{3}$.

Úloha 3

Reálná a imaginární část funkce $f(z)$ jsou $u(x, y) = \frac{y}{1+x^2}$ a $v(x, y) = \frac{xy}{1+x^2}$. Protože

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0, 1) = 1 \neq -1 = -\frac{\partial v}{\partial x}(0, 1),$$

není $f(z)$ diferencovatelná v bodě $z = i$.

Úloha 4

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1 + \frac{2}{z}} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{z^{n+2}}$$

pro $|z| > 2$.

2. semestrální test (varianta A)

Úloha 1

Protože $(1 + \cos(\pi z))|_{z=1} = (1 + \cos(\pi z))'|_{z=1} = 0$ a $(1 + \cos(\pi z))''|_{z=1} = \pi^2 \neq 0$, má funkce $f(z)$ v bodě 1 pól řádu $3 - 2 = 1$.

Úloha 2

$$\mathcal{Z}[a_{n+1}](z) = z\mathcal{Z}[a_n](z) - a_0 = \frac{z^3 + z^2}{(z-1)^3}.$$

Úloha 3

Protože $z^2 - 4z + 5 = 0$ právě tehdy, když $z = 2 \pm i$, je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{x^2 - 4x + 5} dx = -2\pi i \operatorname{res}_{2-i} \frac{e^{-iz}}{z^2 - 4z + 5} = \frac{\pi}{e} e^{-2i}.$$

Úloha 4

Funkce $F(s)$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$ a v bodech $-1, 0, 1$ má póly řádu 1. Odtud

$$f(t) = \operatorname{res}_{-1} F(s)e^{st} + \operatorname{res}_0 F(s)e^{st} + \operatorname{res}_1 F(s)e^{st} = \frac{e^{-t}}{2} - 1 + \frac{e^t}{2}.$$

2. semestrální test (varianta B)

Úloha 1

V bodě 0 má funkce $f(z)$ pól řádu 1, a proto

$$\operatorname{res}_0 f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z^2 + 2z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} \frac{1}{z+2} = \frac{1}{2}.$$

Úloha 2

$$F(s) = \mathcal{L}[e^t](s) - \mathcal{L}[e^t \mathbf{1}(t-1)](s) = \frac{1}{s-1} - e^{-s} \mathcal{L}[e^{t+1}](s) = \frac{1}{s-1} - \frac{e^{1-s}}{s-1}.$$

Úloha 3

Ať $f(z) = \frac{\cos(\pi z)}{z^3 + z^2 - 2z}$. Funkce $f(z)$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{-2, 0, 1\}$ a body $-2, 0, 1$ jsou póly řádu jedna funkce $f(z)$. Proto

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i [\operatorname{res}_0 f(z) + \operatorname{res}_1 f(z)] = 2\pi i \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = -\frac{5}{3}\pi i.$$

Úloha 4

$$\mathcal{Z}[a_n](z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n+1}}{z^{2n+1}} = \frac{2}{z} \frac{1}{1 - \frac{4}{z^2}} = \frac{2z}{z^2 - 4}.$$