

Komplexní analýza a transformace

Písemná část zkoušky (XX.XX.XXXX)

Identifikační číslo: 0

Jméno:

Úloha	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	Celkem
Body											

Čas: 90 minut · Nutné minimum: 25 bodů · Maximum: 50 bodů

Před zahájením práce

- Vyplňte čitelně rubriku „Jméno“.
- Výsledek písemné části a další informace k náhledu a případné ústní zkoušce budou dnes večer zveřejněny na Moodle pod vašim identifikačním číslem.
- Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, psací potřeby, průkaz totožnosti a papíry, které jste obdrželi od vyučujících.
- **Mobilní telefony, hodinky a další elektronická zařízení dejte do batohu, který poté zavřete.**
- Nepište obyčejnou tužkou ani červenou barvou, jinak písemka nebude přijata.
- Na konci každého příkladu formulujte odpověď.
- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**

Závažné časové omezení týkající se termínu ústní zkoušky vyznačte do níže uvedené tabulky. Pokud v daném časovém úseku nemůžete, vyznačte do odpovídajícího políčka tabulky NE.

Ústní zkouška					
Středa XX.XX.		Čtvrtek XX.XX.		Pátek XX.XX.	
dopoledne	odpoledne	dopoledne	odpoledne	dopoledne	odpoledne

Soupis vybraných vzorců

- $\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \sin w \cos z$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.
- $\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.
- $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$ pro $|z-1| < 1$.
- Pro $a > 0$ je $\mathcal{F} \left[e^{-at^2} \right] (\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.
- Pro $n \in \mathbb{N}_0$ je $\mathcal{L} [t^n] (s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathcal{L} [e^{at}] (s) = \frac{1}{s-a}$.
- $\mathcal{L} [\sin t] (s) = \frac{1}{s^2+1}$ a $\mathcal{L} [\cos t] (s) = \frac{s}{s^2+1}$.
- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathcal{Z} [\alpha^n] (z) = \frac{z}{z-\alpha}$.
- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathcal{Z} [\sin(\alpha n)] (z) = \frac{z \sin \alpha}{z^2 - 2z \cos \alpha + 1}$ a $\mathcal{Z} [\cos(\alpha n)] (z) = \frac{z^2 - z \cos \alpha}{z^2 - 2z \cos \alpha + 1}$.
- $\mathcal{Z} [n] (z) = \frac{z}{(z-1)^2}$.

Zadání A

Úloha 1 (8 bodů)

Nalezněte obraz $f(M)$ množiny $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2\}$, jestliže f je Möbiova transformace daná předpisem

$$f(z) = \frac{1}{z + 2i}.$$

Úloha 2 (8 bodů)

Vypočtete

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x-1)(x^2+4)} dx$$

Úloha 3 (8 bodů)

Ať $a_n = 0$ pro všechna $n \geq 2$, $a_0 = 3$ a $a_1 = -4$. Pomocí Z-transformace nalezněte řešení diferenční rovnice

$$y_{n+1} + \sum_{k=0}^n a_k y_{n-k} = 2(-1)^n$$

vyhovující počáteční podmínce $y_0 = -1$.

Úloha 4 (8 bodů)

Nalezněte Fourierovu transformaci funkce

$$f(t) = e^t [\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-1)].$$

a pomocí ní stanovte Fourierovu řadu funkce $g(t)$, která je zúžením funkce $f(t)$ na interval $[-1, 1)$.

Úloha 5 (3 body)

Určete $\frac{\partial v}{\partial y}(2, 3)$, kde v je imaginární část funkce f splňující $f'(2 + 3i) = 4 - 5i$.

Úloha 6 (3 body)

Nalezněte poloměr konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{9^n} z^{2n}.$$

Úloha 7 (3 body)

Nalezněte rozvoj funkce $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ do Laurentovy řady na co největším prstencovém okolí bodu 0 a toto prstencové okolí určete.

Úloha 8 (3 body)

Určete Laplaceovu transformaci funkce $f(t) = \mathbf{1}(t - \pi) \cos t$.

Úloha 9 (3 body)

Fourierova transformace funkce $f(t)$ je $\hat{f}(\omega)$. Nalezněte Fourierovu transformaci funkce $g(t) = f(1-t)e^{it}$.

Úloha 10 (3 body)

Vektor $\mathbf{y} = (1, i, 2, 3) \in \mathbb{C}^4$ má diskrétní Fourierovu transformaci $\hat{\mathbf{y}}$. Nalezněte $\hat{y}_2$.

Zadání B

Úloha 1 (8 bodů)

Je dána funkce

$$u(x, y) = -e^{-2x} \sin(2y) + x(x^2 - 3y^2 - 2).$$

Nalezněte funkci $v(x, y)$ tak, aby $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ byla celistvá a $f\left(i\frac{\pi}{4}\right) = -1 - i\frac{\pi}{2}$.

Úloha 2 (8 bodů)

Nalezněte rozvoj funkce

$$f(z) = \frac{3}{z^4(2z^2 - z - 1)}.$$

do Laurentovy řady na $P(0)$ a určete mezikruží konvergence této řady.

Úloha 3 (8 bodů)

Nalezněte Laplaceův vzor $f(t)$ funkce

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)^2(1+e^{-s})}.$$

Úloha 4 (8 bodů)

Fourierova transformace spojitě funkce $h \in L^1(\mathbb{R})$ je

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{\omega^2 - 3i\omega - 2}.$$

Pomocí Fourierovy transformace nalezněte řešení diferenciální rovnice $y''(t) - 4y(t) = h(t)$.

Úloha 5 (3 body)

Funkce $f(z)$ má na $U(1)$ rozvoj do mocninné řady ve tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n + 2} (z-1)^n$. Určete $f'''(1)$.

Úloha 6 (3 body)

Nalezněte největší mezikruží se středem 1, na kterém existuje rozvoj funkce $f(z) = \frac{1}{z(z-3i)}$ do Laurentovy řady a které obsahuje bod 3.

Úloha 7 (3 body)

Víme, že funkce $f(z)$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{-2, 0, 1\}$ a $\operatorname{res}_{-2} f(z) = 1$, $\operatorname{res}_0 f(z) = 2$, $\operatorname{res}_1 f(z) = 3$. Určete $\int_C f(z) dz$, kde $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = 2\}$ je záporně orientovaná.

Úloha 8 (3 body)

Nalezněte Z-transformaci posloupnosti $\left(\frac{(-1)^n}{n!}\right)_{n=0}^{\infty}$.

Úloha 9 (3 body)

Nalezněte Laplaceovu transformaci $Y(s)$ řešení rovnice $y''(t) - y'(t) = \sin t$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 1$ a $y'(0) = 0$.

Úloha 10 (3 body)

Je dána funkce $f(t) = t^3$, $t \in [-1, 2)$. Napište integrální předpis pro její Fourierovy koeficienty c_n (integrály nepočítejte) a pomocí symbolů c_n запиšte její Fourierovu řadu.

Zadání C

Úloha 1 (8 bodů)

Je dána Möbiova transformace

$$f(z) = \frac{z - 2i}{z + \alpha},$$

kde $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-2i\}$. Stanovte α tak, aby existovala kružnice K se středem v bodě $-i$ taková, že $f(K) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = 1\}$. Dále určete poloměr kružnice K .

Úloha 2 (8 bodů)

Klasifikujte všechny izolované singularity funkce

$$f(z) = \frac{z^2 - z - 2}{1 - \cos(\pi z)}.$$

Úloha 3 (8 bodů)

Z-transformace posloupnosti $(a_n)_{n=0}^\infty \in Z_0$ je

$$A(z) = \frac{1}{3 + 2z} - \ln\left(1 - \frac{3}{z}\right).$$

Určete posloupnost $(a_n)_{n=0}^\infty$.

Úloha 4 (8 bodů)

Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení rovnice

$$y''(t) + y'(t) - 6y(t) = e^{-2t} [\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - 2)]$$

vyhovující počátečním podmínkám $y(0) = 1$ a $y'(0) = 2$.

Úloha 5 (3 body)

Rozhodněte, zda je funkce $f(z) = \bar{z}^2$ je diferencovatelná v bodě 0.

Úloha 6 (3 body)

Ať C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z - 1| = 2$. O funkci $f(z)$ víme, že je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, v 0 má pól řádu 1 a $\operatorname{res}_0 f(z) = 2$. Určete $\int_C z f(z) dz$.

Úloha 7 (3 body)

Nalezněte hlavní část Laurentovy řady funkce $f(z) = \frac{e^z - e^{2z}}{z^4}$ na $P(0)$ a určete $\operatorname{res}_0 f(z)$.

Úloha 8 (3 body)

Funkce $A(z)$ je Z-transformace posloupnosti $(a_n)_{n=0}^\infty$, o které víme, že $a_n = n$ pro $n \in \{0, 1, 2, 3\}$. Nalezněte Z-transformaci posloupnosti $(4^n a_{n+2})_{n=0}^\infty$.

Úloha 9 (3 body)

Stanovte Laplaceovu transformaci periodické funkce $f \in L_0$ s periodou 2 takové, že $f(t) = t$ pro $t \in [0, 2)$.

Úloha 10 (3 body)

Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^4$ má diskrétní Fourierovu transformaci $\hat{\mathbf{x}} = (2 + i, 0, 0, 2)$. Pomocí Parsevalovy rovnosti určete $\|\mathbf{x}\|$.

Zadání D

Úloha 1 (8 bodů)

Nalezněte součet mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)} z^{n+2}$$

na kruhu konvergence a tento kruh určete.

Úloha 2 (8 bodů)

Vypočtete

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-1}{x^3+1} dx$$

Úloha 3 (8 bodů)

Pomocí Z-transformace nalezněte řešení diferenční rovnice

$$y_{n+1} + y_n = \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2^n}$$

vyhovující počáteční podmínce $y_0 = 1$.

Úloha 4 (8 bodů)

Nalezněte Laplaceovu transformaci funkce

$$f(t) = \begin{cases} \cos t, & t \in [0, \pi); \\ -e^{-t+\pi}, & t \geq \pi. \end{cases}$$

Úloha 5 (3 body)

Rozhodněte, zda imaginární část funkce $f(z) = e^{\bar{z}}$ je harmonická na $\mathbb{R}^2$.

Úloha 6 (3 body)

Určete násobnost kořene $a = 1$ funkce $f(z) = z^5 - z^4 - z^3 + 2z - 1$.

Úloha 7 (3 body)

Funkce $f(z)$ má na $P(0)$ rozvoj do Laurentovy řady ve tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} z^{1-2n}$. Určete typ izolované singularity funkce f v bodě 0 a nalezněte $\text{res}_0 f(z)$.

Úloha 8 (3 body)

Je dána posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, kde $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ a $a_n = 0$ pro $n \geq 2$. Nalezněte posloupnost $(b_n)_{n=0}^{\infty} = (a_n)_{n=0}^{\infty} * (a_n)_{n=0}^{\infty}$.

Úloha 9 (3 body)

Funkce $f \in L^1(\mathbb{R})$, kde $f(t) = 0$ pro $t < 0$, má Laplaceovu transformaci $F(s) = \frac{s-1}{(s+1)^3}$. Určete Fourierovu transformaci funkce f .

Úloha 10 (3 body)

Funkce $f(t)$ z $L^1 \in \mathbb{R}$ má Fourierovu transformaci $\hat{f}(\omega)$. Nalezněte Fourierovu transformaci funkce $g(t) = tf(t+3)$.

Řešení – zadání A

Úloha 1

Ať $C = \partial M$. Protože $-2i \in C$, je $f(C)$ přímka spolu s nekonečnem. Zřejmě

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{f} & -\frac{i}{2} \\ \uparrow C & & \uparrow f(C) \\ \infty & \xrightarrow{f} & 0 \end{array}$$

Tedy $f(C) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = -\frac{1}{4}\} \cup \{\infty\}$. Protože $f(0) = -\frac{i}{2}$, je

$$f(M) = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \leq -\frac{1}{4}\right\} \cup \{\infty\}.$$

Úloha 2

Ať $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z-1)(z^2+4)}$. Funkce $f(z)$ má jediné izolované singularity v bodech $\pm 2i$ a 1. Proto

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= 2\pi i \operatorname{res}_{2i} f(z) + i\pi \operatorname{res}_1 f(z) = \pi \frac{e^{-2}}{2(2i-1)} + i\pi \frac{e^i}{5} \\ &= \frac{\pi}{5} \left(-\frac{1+2i}{2e^2} + i \cos 1 - \sin 1 \right). \end{aligned}$$

Odtud

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x-1)(x^2+4)} dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \frac{\pi}{5} \left(-\frac{1}{e^2} + \cos 1 \right).$$

Úloha 3

Aplikací Z-transformace na zadanou diferenční rovnici dostaneme

$$z[Y(z) + 1] + \left(3 - \frac{4}{z}\right)Y(z) = \frac{2z}{z+1}.$$

Odtud $Y(z) = \frac{-z^2}{(z+1)(z+4)}$. Proto

$$y_n = \operatorname{res}_{-1} Y(z)z^{n-1} + \operatorname{res}_{-4} Y(z)z^{n-1} = \frac{(-1)^n + (-4)^{n+1}}{3}$$

pro $n \geq 0$.

Úloha 4

Z definice Fourierovy transformace dostaneme

$$\hat{f}(\omega) = \int_0^1 e^{t(1-i\omega)} dt = \frac{e^{1-i\omega} - 1}{1-i\omega}.$$

Pro každé $n \in \mathbb{Z}$ máme

$$c_n = \frac{1}{2} \hat{f}(\pi n) = \frac{1}{2} \frac{e^{1-i\pi n} - 1}{1-i\pi n} = \frac{(-1)^n e - 1}{2(1-i\pi n)}.$$

Fourierova řada funkce $g(t)$ proto je

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n e - 1}{2(1-i\pi n)} e^{i\pi n t}.$$

Úloha 5

Protože $f'(2+3i) = \frac{\partial u}{\partial x}(2,3) + i \frac{\partial v}{\partial x}(2,3)$, dostaneme z Cauchy-Riemannových podmínek, že $\frac{\partial v}{\partial y}(2,3) = \frac{\partial u}{\partial x}(2,3) = 4$.

Úloha 6

Protože $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{nz^{2n}}{9^n} \right|} = \frac{|z|^2}{9} < 1$ právě tehdy, když $|z| < 3$, je poloměr konvergence $R = 3$.

Úloha 7

Využitím znalosti součtu geometrické řady dostaneme

$$f(z) = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} -z^{n-1}.$$

pro $0 < |z| < 1$.

Úloha 8

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = e^{-\pi s} \mathcal{L}[\cos(t+\pi)](s) = -e^{-\pi s} \mathcal{L}[\cos t](s) = -\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}.$$

Úloha 9

$$\hat{g}(\omega) = \mathcal{F}[f(1-t)](\omega-1) = \mathcal{F}[f(1+t)](1-\omega) = e^{i(1-\omega)} \hat{f}(1-\omega).$$

Úloha 10

Po dosazení do definice diskrétní Fourierovy transformace máme

$$\hat{y}_2 = \sum_{l=0}^3 y^l e^{-i\pi l} = 1 - i + 2 - 3 = -i.$$

Řešení – zadání B

Úloha 1

Cauchyovy-Riemannovy podmínky vedou na

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial y} &= -2e^{-2x} \sin(-2y) + 3x^2 - 3y^2 - 2, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 2e^{-2x} \cos(-2y) + 6xy.\end{aligned}$$

Integrací druhé podmínky dostaneme

$$v(x, y) = -e^{-2x} \cos(2y) + 3x^2 y + C(y).$$

Dosazením do první podmínky obdržíme $C'(y) = -3y^2 - 2$. Tedy $C(y) = -y^3 - 2y + K$, kde $K \in \mathbb{R}$. Protože $f\left(i\frac{\pi}{4}\right) = -1 - i\frac{\pi}{2}$, je

$$-\frac{\pi}{2} = v\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = C\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi^3}{4^3} - \frac{\pi}{2} + K.$$

Odtud $K = \frac{\pi^3}{4^3}$, a proto

$$v(x, y) = -e^{-2x} \cos(2y) + 3x^2 y - y^3 - 2y + \frac{\pi^3}{4^3}.$$

Úloha 2

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{3}{2z^4(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{z^4} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{z^4} \left(-\sum_{n=0}^{+\infty} z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n 2^{n+1} z^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} [-1 + (-2)^{n+1}] z^{n-4}\end{aligned}$$

pro $0 < |z| < \frac{1}{2}$.

Úloha 3

Protože $1 + e^{-s} = 0$ právě tehdy, když $s = i\pi(2k+1)$, je funkce $F(s)$ holomorfní na $\mathbb{C} \setminus (\{1\} \cup \{i\pi(2k+1) \mid k \in \mathbb{Z}\})$. V bodě 1 má funkce $F(s)$ pól řádu 2 a v bodech $z_k = i\pi(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, má póly řádu 1 (neboť $(1 + e^{-s})'|_{s=z_k} = 1 \neq 0$ a $(s-1)^2|_{s=z_k} \neq 0$). Protože

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_1 F(s)e^{st} &= \frac{te^t}{1+e^{-1}} + \frac{e^{t+1}}{(1+e)^2}, \\ \operatorname{res}_{z_k} F(s)e^{st} &= \frac{e^{i\pi(2k+1)t}}{[i\pi(2k+1)-1]^2},\end{aligned}$$

je

$$f(t) = \frac{te^t}{1+e^{-1}} + \frac{e^{t+1}}{(1+e)^2} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{e^{i\pi(2k+1)t}}{[i\pi(2k+1)-1]^2}.$$

Úloha 4

Aplikací Fourierovy transformace na zadanou rovnici dostaneme $-\omega^2 \hat{y}(\omega) - 4\hat{y}(\omega) = \frac{1}{\omega^2 - 3i\omega - 2}$. Odtud

$$\hat{y}(\omega) = -\frac{1}{(\omega^2 + 4)(\omega^2 - 3i\omega - 2)} = -\frac{1}{(\omega + 2i)(\omega - 2i)^2(\omega - i)}.$$

Proto pro $t \geq 0$ je

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = i [\operatorname{res}_i \hat{y}(\omega) e^{i\omega t} + \operatorname{res}_{2i} \hat{y}(\omega) e^{i\omega t}] \\ &= \frac{e^{-t}}{3} - \frac{te^{-2t}}{4} - \frac{5}{16} e^{-2t} \end{aligned}$$

a pro $t < 0$ je

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = -i \operatorname{res}_{-2i} \hat{y}(\omega) e^{i\omega t} = \frac{e^{2t}}{48}.$$

Úloha 5

Ze souvislosti derivace funkce f a koeficientů mocninné řady obdržíme

$$f'''(1) = 6 \frac{1}{n^2 - n + 2} \Big|_{n=3} = \frac{3}{4}.$$

Úloha 6

Protože mezikruží musí obsahovat bod 3 a na mezikruží musí být funkce f holomorfní, nemůže být vnitřní poloměr menší než $|1 - 0| = 1$ a vnější poloměr nemůže být větší než $|1 - 3i| = \sqrt{10}$. Hledané mezikruží proto je $P(1; 1; \sqrt{10})$.

Úloha 7

Uvnitř křivky C leží body 0 a 1, zatímco bod -2 leží vně. Z Reziduové věty plyne, že

$$\int_C f(z) dz = -2\pi i (\operatorname{res}_0 f(z) + \operatorname{res}_1 f(z)) = -10\pi i.$$

Úloha 8

$$\mathcal{L} \left[\frac{(-1)^n}{n!} \right] (z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-1}{z} \right)^n = e^{-\frac{1}{z}}.$$

Úloha 9

Aplikací Laplaceovy transformace na zadanou rovnici dostaneme

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - sY(s) + y(0) = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Dosazením počátečních podmínek a vyjádřením obrazu řešení obdržíme

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)(s^2 - s)} + \frac{1}{s}.$$

Úloha 10

Fourierova řada funkce $f(t)$ je

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{3}},$$

kde

$$c_n = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 t^3 e^{-\frac{2\pi i n t}{3}} dt.$$

Řešení – zadání C

Úloha 1

$$\begin{array}{ccc} \infty & \xrightarrow{f} & 1 \\ \updownarrow K & & \updownarrow f(K) \\ -\alpha & \xrightarrow{f} & \infty \end{array}$$

Protože $-\alpha$ a ∞ jsou vzájemně inverzní body vzhledem ke kružnici K , je $\alpha = i$. Poloměr kružnice K je

$$R = |f^{-1}(0) - (-i)| = |2i + i| = 3.$$

Úloha 2

Označme $g(z) = 1 - \cos(\pi z)$. Z definice funkce kosinus (v komplexním oboru) okamžitě plyne, že $g(z) = 0$ právě tehdy, když $e^{i\pi z} + e^{-i\pi z} = 2$. Tedy $g(z) = 0$ právě tehdy, když

$$0 = e^{2i\pi z} - 2e^{i\pi z} + 1 = (e^{i\pi z} - 1)^2.$$

Odtud vidíme, že $g(z) = 0$ právě tehdy, když $z = 2k$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$. Protože $g'(2k) = 0$ a $g''(2k) = \pi^2 \neq 0$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$, je $2k$ kořen násobnosti 2 funkce $g(z)$. Dále funkce $z^2 - z - 2$ má v bodech -1 a 2 kořeny násobnosti 1. Proto 2 je pól řádu 1 funkce $f(z)$ a pro každé $k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ je bod $2k$ pól řádu 2 funkce $f(z)$.

Úloha 3

Protože

$$\frac{1}{3+2z} = \frac{1}{2z} \frac{1}{1+\frac{3}{2z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{2^{n+1}} \frac{1}{z^{n+1}}$$

pro $|z| > \frac{3}{2}$ a

$$\ln\left(1 - \frac{3}{z}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(-\frac{3}{z}\right)^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n} \frac{1}{z^n}$$

pro $|z| > 3$, je

$$A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{2^{n+1}} \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(-3)^{n-1}}{2^n} + \frac{3^n}{n} \right] \frac{1}{z^n}$$

pro $|z| > 3$. Odtud

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = 0; \\ \frac{(-3)^{n-1}}{2^n} + \frac{3^n}{n} & n \geq 1. \end{cases}$$

Úloha 4

Aplikací Laplaceovy transformace na zadanou rovnici dostaneme

$$s^2 Y(s) - s - 2 + sY(s) - 1 - 6Y(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{e^{-4}e^{-2s}}{s+2}.$$

Odtud

$$Y(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)(s-2)} + \frac{1}{s-2} - \frac{e^{-4}e^{-2s}}{(s+2)(s+3)(s-2)}.$$

Označme $G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)(s-2)}$. Laplaceův vzor funkce $G(z)$ je

$$g(t) = \operatorname{res}_{-3} G(s)e^{st} + \operatorname{res}_{-2} G(s)e^{st} + \operatorname{res}_2 G(s)e^{st} = \frac{1}{5}e^{-3t} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{20}e^{2t}.$$

Proto

$$\begin{aligned} y(t) &= g(t) + e^{2t} - e^{-4}g(t-2)\mathbf{1}(t-2) \\ &= \frac{1}{5}e^{-3t} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{21}{20}e^{2t} - e^{-4} \left[\frac{1}{5}e^{-3(t-2)} - \frac{1}{4}e^{-2(t-2)} + \frac{1}{20}e^{2(t-2)} \right] \mathbf{1}(t-2) \end{aligned}$$

pro $t \geq 0$.

Úloha 5

Funkce $f(z)$ má reálnou část $u(x, y) = x^2 - y^2$ a imaginární část $v(x, y) = -2xy$. Protože u, v jsou třídy C^1 a jsou splněny Cauchy-Riemannovy podmínky v bodě $(0, 0)$ ($\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = 0 = \frac{\partial v}{\partial y}(0, 0)$ a $\frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}(0, 0)$), je funkce $f(z)$ diferencovatelná v bodě 0 .

Úloha 6

Protože 0 leží uvnitř křivky C a $zf(z)$ má v 0 odstranitelnou singularitu, je

$$\int_C zf(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_0 zf(z) = 0.$$

Úloha 7

Ze známého rozvoje exponenciální funkce máme $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1-2^n}{n!} z^{n-4}$ pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Hlavní část Laurentovy řady proto je

$$-\frac{1}{z^3} - \frac{3}{2z^2} - \frac{7}{6z}.$$

Odtud $\operatorname{res}_0 f(z) = -\frac{7}{6}$.

Úloha 8

$$\mathcal{Z}[4^n a_{n+2}](z) = \mathcal{Z}[a_{n+2}]\left(\frac{z}{4}\right) = \frac{z^2}{16} \left[A\left(\frac{z}{4}\right) - a_0 - \frac{4a_1}{z} \right] = \frac{z^2}{16} \left[A\left(\frac{z}{4}\right) - \frac{4}{z} \right].$$

Úloha 9

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{\mathcal{L}[t - t\mathbf{1}(t-2)](s)}{1 - e^{-2s}} = \frac{\frac{1}{s^2} - e^{-2s}\mathcal{L}[t+2](s)}{1 - e^{-2s}} = \frac{1 - e^{-2s} - 2se^{-2s}}{s^2(1 - e^{-2s})}.$$

Úloha 10

Protože $\|\hat{\mathbf{x}}\| = \sqrt{5+4} = 3$, je

$$\|\mathbf{x}\| = \frac{1}{2} \|\hat{\mathbf{x}}\| = \frac{3}{2}.$$

Řešení – zadání D

Úloha 1

Protože

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{n+1} = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = ze^z,$$

pro $z \in \mathbb{C}$, je

$$f(z) = \int ze^z dz = ze^z - \int e^z dz = ze^z - e^z + K,$$

kde $K \in \mathbb{C}$, pro $z \in \mathbb{C}$. Dosazením $z = 0$ do zadané řady dostaneme $0 = f(0) = -1 + K$, a proto $K = 1$. Tedy

$$f(z) = (z - 1)e^z + 1$$

pro $z \in \mathbb{C}$ (tj. hledaný poloměr konvergence je $R = +\infty$).

Úloha 2

Komplexní číslo z je řešením rovnice $z^3 + 1 = 0$ právě tehdy, když $z = e^{i\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi i}{3}}$, kde $k = 0, 1, 2$. Proto funkce $f(z) = \frac{z-1}{z^3+1}$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \left\{e^{i\frac{\pi}{3}}, -1, e^{i\frac{5\pi}{3}}\right\}$. Tedy

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-1}{x^3+1} dx &= i\pi \operatorname{res}_{-1} f(z) + 2\pi i \operatorname{res}_{e^{i\frac{\pi}{3}}} f(z) = i\pi \left. \frac{z-1}{3z^2} \right|_{z=-1} + 2i\pi \left. \frac{z-1}{3z^2} \right|_{z=e^{i\frac{\pi}{3}}} \\ &= -\frac{2i\pi}{3} + 2i\pi \left. \frac{z^2-z}{3z^3} \right|_{z=e^{i\frac{\pi}{3}}} = -\frac{2i\pi}{3} - 2i\pi \frac{e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{3}}}{3} \\ &= -\frac{2i\pi}{3} - 2i\pi \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}+i\pi} - e^{i\frac{\pi}{3}}}{3} = -\frac{2i\pi}{3} + 2i\pi \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{3}}}{3} \\ &= -\frac{2i\pi}{3} + 2i\pi \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3} = 0. \end{aligned}$$

Úloha 3

Aplikací Z-transformace na zadanou rovnici obdržíme

$$z[Y(z) - 1] + Y(z) = \mathcal{Z}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right](2z) = \frac{4z^2}{4z^2 + 1}.$$

Proto

$$Y(z) = \frac{z}{z+1} + \frac{z^2}{\left(z^2 + \frac{1}{4}\right)(z+1)}.$$

Ať $A(z) = \frac{z^2}{(z^2 + \frac{1}{4})(z+1)}$. Potom pro $n \geq 0$ je

$$\begin{aligned} y_n &= (-1)^n + \operatorname{res}_{-1} A(z)z^{n-1} + \operatorname{res}_{\frac{i}{2}} A(z)z^{n-1} + \operatorname{res}_{-\frac{i}{2}} A(z)z^{n-1} \\ &= (-1)^n + \frac{4(-1)^{n+1}}{5} + \frac{i^{n+1}}{2^{n+1}\left(i - \frac{1}{2}\right)} + \frac{(-i)^{n+1}}{2^{n+1}\left(-i - \frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{(-1)^n}{5} + 2\operatorname{Re}\left[\frac{i^{n+1}}{2^{n+1}\left(i - \frac{1}{2}\right)}\right] = \frac{(-1)^n}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}} \operatorname{Re}\left[2i^n - i^{n+1}\right]. \end{aligned}$$

Úloha 4

$$\begin{aligned}
F(s) &= \mathcal{L}[(\cos t)(1 - \mathbf{1}(t - \pi)) - e^{-(t-\pi)\mathbf{1}(t-\pi)}](s) \\
&= \frac{s}{s^2 + 1} - e^{-\pi s} \mathcal{L}[\cos(t + \pi)](s) - e^{-\pi s} \mathcal{L}[e^{-t}](s) \\
&= \frac{s}{s^2 + 1} + e^{-\pi s} \mathcal{L}[\cos t](s) - e^{-\pi s} \frac{1}{s + 1} = \frac{s(1 + e^{-\pi s})}{s^2 + 1} - \frac{e^{-\pi s}}{s + 1}.
\end{aligned}$$

Úloha 5

Funkce $f(z)$ má imaginární část $v(x, y) = -e^x \sin y$, která je třídy C^2 . Protože $\Delta v(x, y) = -e^x \sin y + e^x \sin y = 0$ na $\mathbb{R}^2$, je $v(x, y)$ harmonická na $\mathbb{R}^2$.

Úloha 6

Snadno nalezneme, že $f'(1) = 5z^4 - 4z^3 - 3z^2 + 2|_{z=1} = 0$ a $f''(1) = 20z^3 - 12z^2 - 6z|_{z=1} = 2 \neq 0$. Tedy kořen a má násobnost 2.

Úloha 7

Protože hlavní část Laurentovy řady má nekonečně mnoho nenulových členů, jedná se o podstatnou singularitu. Navíc $\text{res}_0 f(z) = -2$.

Úloha 8

Zřejmě $\mathcal{L}[b_n](z) = \left(1 + \frac{2}{z}\right)^2 = 1 + \frac{4}{z} + \frac{4}{z^2}$. Proto $b_0 = 1$, $b_1 = 4$, $b_2 = 4$ a $b_k = 0$ pro $k \geq 3$.

Úloha 9

$$\hat{f}(\omega) = F(i\omega) = \frac{i\omega - 1}{(i\omega + 1)^3}.$$

Úloha 10

$$\hat{g}(\omega) = \mathcal{F}[tf(t+3)](\omega) = i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}[f(t+3)](\omega) = i \left[e^{3i\omega} \hat{f}(\omega) \right]'.$$