

Komplexní analýza a transformace

Elementární funkce

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
martin.bohata@fel.cvut.cz

Definice (polynom)

Polynom je komplexní funkce daná předpisem

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k z^k,$$

kde $n \in \mathbb{N}_0$ a $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Čísla $a_0, \dots, a_n$ nazýváme **koefficienty polynomu P** . **Stupeň** nenulového polynomu P je největší číslo $k = 0, \dots, n$ splňující $a_k \neq 0$ a značí se symbolem $\text{st}(P)$.

- Stupeň nulového polynomu nedefinujeme. Mluvíme-li tedy o polynomu P stupně $\text{st}(P)$, pak tím implicitně říkáme, že P je nenulový.
- Polynom je celistvá funkce.
- Speciálním případem polynomu je **afinní funkce** $f(z) = az + b$, kde $a, b \in \mathbb{C}$. Je-li $a \neq 0$, pak se jedná o složení rotace, stejnolehlosti a posunutí.

Definice (racionální funkce)

Racionální funkce je komplexní funkce daná předpisem

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

kde P je polynom a Q je nenulový polynom.

- Definiční obor $D = \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) \neq 0\}$ racionální funkce $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ je otevřená množina.
- Racionální funkce je holomorfní na svém definičním oboru.

Möbiova transformace

- Ať $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ splňují $ad - bc \neq 0$. Máme-li racionální funkci $R(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, pak $\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = \frac{a}{c}$ a $\lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} R(z) = \infty$.

Definice (Möbiova transformace)

Möbiova transformace (případně **lineární lomené zobrazení**) je zobrazení $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ takové, že existují $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ splňující $ad - bc \neq 0$ a současně

$$f(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, & \text{je-li } z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}; \\ \frac{a}{c}, & \text{je-li } z = \infty; \\ \infty, & \text{je-li } z = -\frac{d}{c}. \end{cases}$$

Úmluva

O Möbiově transformaci budeme pro jednoduchost mluvit jako o zobrazení $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

Tvrzení (vlastnosti Möbiovy transformace)

- 1 Složení dvou Möbiových transformací je Möbiova transformace.
- 2 At' pro každé $\alpha \in \mathbb{C}$ a $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jsou F_α , G_β a H Möbiovy transformace dané předpisy $F_\alpha(z) = z + \alpha$, $G_\beta(z) = \beta z$ a $H(z) = \frac{1}{z}$. Je-li $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ Möbiova transformace, pak je složením konečně mnoha zobrazení typu F_α , G_β a H .
- 3 Möbiova transformace je bijekce a její inverze je opět Möbiova transformace.

Důkaz: Viz přednáška. ■

- $F_\alpha|_{\mathbb{C}}$ je posunutí.
- $G_\beta|_{\mathbb{C}}$ je složení otočení a stejnolehlosti.
- $H|_{\mathbb{C} \setminus \{0\}}$ je složení kruhové inverze (tj. zobrazení $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$) vůči jednotkové kružnici a osové souměrnosti kolem reálné osy.

Möbiova transformace

Příklad

Inverze Möbiovy transformace $f(z) = \frac{z-i}{z+2}$ je Möbiova transformace $f^{-1}(w) = \frac{2w+i}{-w+1}$.

- Množina $L \subseteq \mathbb{C}$ je **přímka**, jestliže existují čísla $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ taková, že alespoň jedno z čísel α, β je nenulové a

$$L = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid \alpha x + \beta y + \gamma = 0\}.$$

- Množina $K \subseteq \mathbb{C}$ je **kružnice**, jestliže existují čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $R > 0$ tak, že

$$\begin{aligned} K &= \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2\} \\ &= \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid |z - (\alpha + i\beta)| = R\}. \end{aligned}$$

Möbiova transformace

Ať pro každé $A, C \in \mathbb{R}$ a $B \in \mathbb{C}$ splňující $AC < |B|^2$ je $M(A, B, C) \subseteq \mathbb{C}$ množina všech řešení rovnice

$$Az\bar{z} + B\bar{z} + \overline{B}z + C = 0.$$

- Je-li $A = 0$, pak $z = x + iy \in M(A, B, C)$ právě tehdy, když

$$2(\operatorname{Re} B)x + 2(\operatorname{Im} B)y + C = 0.$$

- Je-li $A \neq 0$, pak $z = x + iy \in M(A, B, C)$ právě tehdy, když

$$\left(x + \frac{\operatorname{Re} B}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{\operatorname{Im} B}{A}\right)^2 = \frac{|B|^2 - AC}{A^2}.$$

Tedy $K \subseteq \mathbb{C}$ je kružnice nebo přímka právě tehdy, když $K = M(A, B, C)$ pro nějaké $A, C \in \mathbb{R}$ a $B \in \mathbb{C}$ splňující $AC < |B|^2$.

Möbiova transformace

Stereografická projekce dává korespondence:

- 1 $\{\infty\}$ sjednoceno s přímkou v $\mathbb{C} \leftrightarrow$ kružnice na Riemannově sféře procházející severním pólem.
- 2 kružnice v $\mathbb{C} \leftrightarrow$ kružnice na Riemannově sféře neprocházející severním pólem.

Definice (zobecněná kružnice)

Řekneme, že množina $K \subseteq \mathbb{C}_\infty$ je **zobecněná kružnice**, jestliže nastává jedna z možností:

- 1 $K \subseteq \mathbb{C}$ je kružnice;
- 2 $K = L \cup \{\infty\}$, kde $L \subseteq \mathbb{C}$ je přímka.

Věta (Möbiova transformace a zobecněné kružnice)

Möbiova transformace zobrazuje zobecněné kružnice na zobecněné kružnice.

Důkaz: Viz přednáška.



Definice (inverzní body)

Ať $\alpha \in \mathbb{C}_\infty$ a K je zobecněná kružnice. Řekneme, že $\beta \in \mathbb{C}_\infty$ je **inverzní bod k α vzhledem k zobecněné kružnici K** , jestliže nastane jeden z případů:

- 1 $\beta = \alpha \in K$;
- 2 $L = K \setminus \{\infty\}$ je přímka, $\alpha \notin K$ a β je osově souměrný k α vzhledem k přímce L (tj. L je osa úsečky s krajními body α a β).
- 3 K kružnice se středem $S \in \mathbb{C}$ a poloměrem $R > 0$, $\alpha \notin K \cup \{S, \infty\}$, $\beta - S = \lambda(\alpha - S)$ pro nějaké $\lambda > 0$ a navíc $|\beta - S||\alpha - S| = R^2$.
- 4 K kružnice se středem $S \in \mathbb{C}$ a $\{\alpha, \beta\} = \{S, \infty\}$.

Möbiova transformace

- Je-li β inverzní bod k α vzhledem k zobecněné kružnici K , pak je také α inverzní bod k β vzhledem ke K .
- Pro danou zobecněnou kružnici K existuje ke každému bodu $z \in \mathbb{C}_\infty$ právě jeden inverzní bod vzhledem ke K .

Tvrzení (inverzní bod vzhledem ke kružnici)

Jestliže K je kružnice se středem S a poloměrem $R > 0$, pak

$$\beta = S + \frac{R^2}{\alpha - S}$$

je inverzní bod k $\alpha \in \mathbb{C} \setminus (K \cup \{S\})$ vzhledem ke K .

Důkaz: Viz přednáška. ■

Věta (inverzní body a Möbiova transformace)

Möbiova transformace zachovává inverzní body vzhledem k zobecněným kružnicím.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Příklad

Je dána Möbiova transformace

$$f(z) = \frac{z + 1}{z - i}.$$

Obraz kružnice $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ je osa úsečky $\text{seg}(1; i)$, ke které přidáme bod nekonečno, tj.

$$f(K) = \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid (1 - i)\bar{z} + (1 + i)z = 0\}.$$

Möbiova transformace

Tvrzení

Ať f je Möbiova transformace a K je zobecněná kružnice a $M, N \subseteq \mathbb{C}$ jsou disjunktní oblasti takové, že $M \cup N = \mathbb{C} \setminus K$. Potom $f(M) \setminus \{\infty\}$ a $f(N) \setminus \{\infty\}$ jsou disjunktní oblasti a $[f(M) \cup f(N)] \setminus \{\infty\} = \mathbb{C} \setminus f(K)$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Příklad

Je dána Möbiova transformace

$$f(z) = \frac{z+1}{z-i}.$$

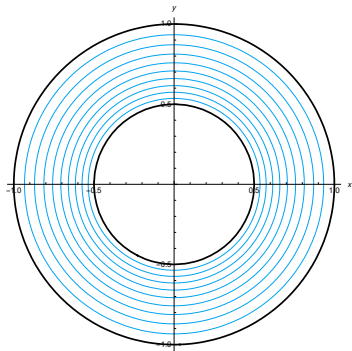
Obraz poloroviny $M = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \leq 0\}$ je

$$f(M) = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \mid \left| z - \frac{1+i}{2} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

Möbiova transformace – ukázka aplikace

- Ať $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{2} < |z| < 1\}$, $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ a $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \frac{1}{2}\}$.
- Řešení rovnice $\Delta\Phi(x, y) = 0$ na Ω , které splňuje $\Phi(x, y) = 0$ na C a $\Phi(x, y) = 100$ na K je

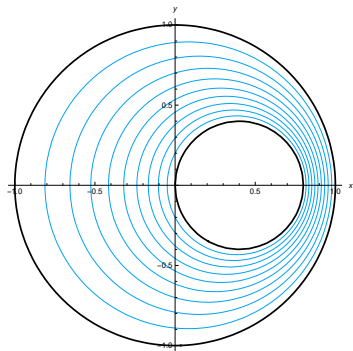
$$\Phi(x, y) = -\frac{100}{\ln 2} \ln |z| = -\frac{100}{\ln 2} \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Möbiova transformace – ukázka aplikace

- Ať $f(z) = \frac{2z-1}{z-2}$. Pak $f(\Omega) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \text{ a } |z - \frac{2}{5}| > \frac{2}{5}\}$.
- Řešení rovnice $\Delta \tilde{\Phi}(x, y) = 0$ na $f(\Omega)$ splňující $\tilde{\Phi}(x, y) = 0$ na $f(C) = C$ a $\tilde{\Phi}(x, y) = 100$ na $f(K) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \frac{2}{5}| = \frac{2}{5}\}$ je

$$\tilde{\Phi}(x, y) = -\frac{100}{\ln 2} \ln \left| \frac{2z-1}{z-2} \right| = -\frac{100}{\ln 2} \ln \sqrt{\frac{(2x-1)^2 + 4y^2}{(x-2)^2 + y^2}}.$$



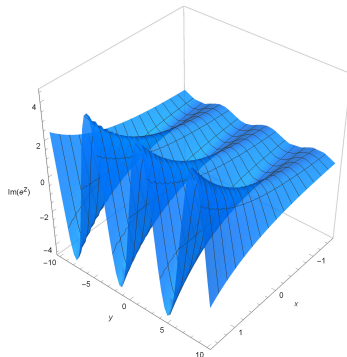
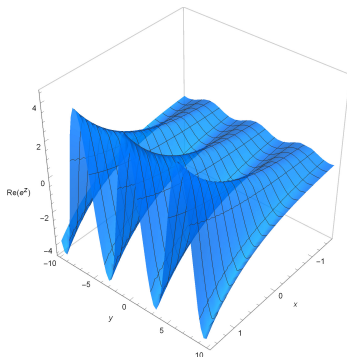
Exponenciála

Definice (exponenciální funkce)

Komplexní funkce

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y), \quad z = x + iy \in \mathbb{C},$$

se nazývá **exponenciální funkce** (krátce **exponenciála**).



Tvrzení (vlastnosti exponenciální funkce)

Pro všechna $z, w \in \mathbb{C}$ platí

- ① $e^{z+w} = e^z e^w$;
- ② $|e^z| = e^x$, kde $x = \operatorname{Re} z$;
- ③ $e^z \neq 0$;
- ④ $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$;
- ⑤ $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$;
- ⑥ $e^z = e^w$ právě tehdy, když $w = z + 2k\pi i$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$;
- ⑦ $(e^z)' = e^z$.

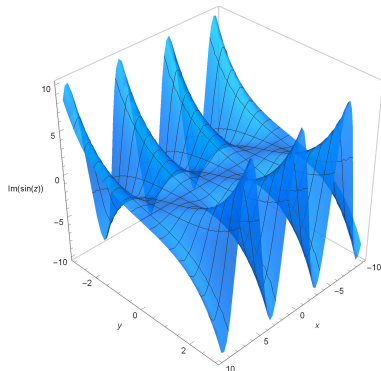
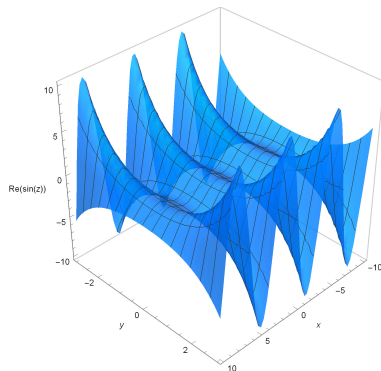
Důkaz: Viz přednáška. ■

Goniometrické funkce

- Pro $x \in \mathbb{R}$ máme $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ a $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$.

Definice (funkce sinus a kosinus)

- Komplexní funkce $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $z \in \mathbb{C}$, se nazývá **sinus**.
- Komplexní funkce $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $z \in \mathbb{C}$, se nazývá **kosinus**.



Věta (vlastnosti funkcí sinus a kosinus)

- 1 $\sin z = 0$ právě tehdy, když $z = k\pi$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$.
- 2 $\cos z = 0$ právě tehdy, když $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$.
- 3 $(\sin z)' = \cos z$ a $(\cos z)' = -\sin z$ pro každé $z \in \mathbb{C}$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

- Platí analogické identity jako v reálném případě $(\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \dots)$.
- Obdobně jako v reálném případě můžeme definovat funkce **tangens** a **kotangens**:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\};$$
$$\operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Definice (hyperbolický sinus a kosinus)

- ① **Hyperbolický sinus** je funkce $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, $z \in \mathbb{C}$.
 - ② **Hyperbolický kosinus** je funkce $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$, $z \in \mathbb{C}$.
- Pro všechna $z \in \mathbb{C}$ platí $(\sinh z)' = \cosh z$ a $(\cosh z)' = \sinh z$.
 - Platí vztahy mezi hyperbolickými a goniometrickými funkcemi (tzv. Osbornova pravidla):

$$\cos(iz) = \cosh z, \quad \text{pro každé } z \in \mathbb{C};$$

$$\sin(iz) = i \sinh z, \quad \text{pro každé } z \in \mathbb{C}.$$

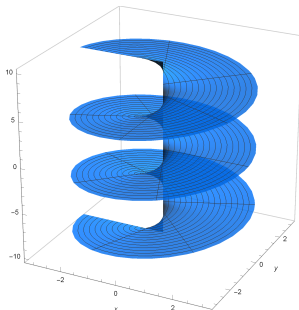
Logaritmus

Příklad

Uvažme rovnici $e^w = z$, kde $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je libovolné pevné. Množina všech jejích řešení je

$$\operatorname{Ln} z = \{\ln |z| + i(\arg z + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\} = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z.$$

Přiřazení $z \mapsto \operatorname{Ln} z$, $z \neq 0$, je tzv. mnohoznačná funkce nazývaná **logaritmus**.

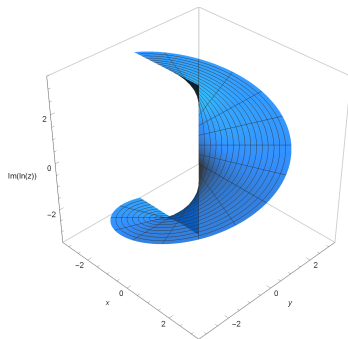
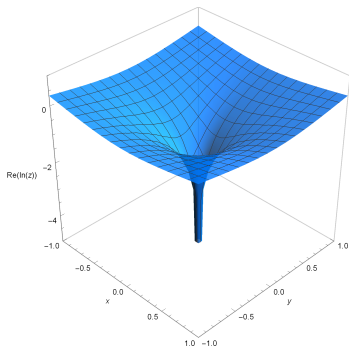


Logaritmus

Vybereme-li pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jednu hodnotu z množiny $\operatorname{Ln} z$, dostaneme komplexní funkci definovanou na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Definice (hlavní hodnota logaritmu)

Komplexní funkce $\ln z = \ln |z| + i \arg z$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, se nazývá **hlavní hodnota logaritmu**.



Logaritmus

Příklad

$$\ln(1) = 0, \ln(-1) = i\pi, \ln(i) = i\frac{\pi}{2}.$$

- Platí $\operatorname{Ln}(zw) = \operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} w$, ale obecně je $\ln(zw) \neq \ln z + \ln w$.

Příklad

Pro $z = w = e^{i\frac{3}{4}\pi}$ je $\ln(zw) = -\frac{i\pi}{2} \neq \frac{3i\pi}{2} = \ln z + \ln w$.

- $e^{\ln z} = z$ pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ale obecně je $z \neq \ln e^z$.

Příklad

$$\ln(e^{2\pi i}) = 0 \neq 2\pi i.$$

- Je-li $z = x + iy$, kde $x \in \mathbb{R}$ a $y \in (-\pi, \pi]$, pak $\ln e^z = z$.

Připomeňme, že

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{pro } \operatorname{Re} z > 0, \\ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{y} & \text{pro } \operatorname{Im} z > 0, \\ -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{y} & \text{pro } \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

Věta (derivace hlavní hodnoty logaritmu)

Komplexní funkce $\ln z$ je holomorfní na

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = 0\}$$

a pro každé $z \in \Omega$ platí $(\ln z)' = \frac{1}{z}$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Obecná mocnina

Definice (Obecná mocnina)

Ať $a \in \mathbb{C}$.

- ❶ Množina $M_a(z) = e^{a \operatorname{Ln} z} = \{e^{aw} \mid w \in \operatorname{Ln} z\}$ se nazývá **a -tá mocnina** komplexního čísla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
 - ❷ Komplexní funkce $m_a(z) = e^{a \operatorname{Ln} z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, se nazývá **hlavní hodnota a -té mocniny**.
- Ať $n \in \mathbb{Z}$. Potom $M_n(z) = \{z^n\}$. Tedy $m_n(z) = z^n$. Pro $n \in \mathbb{N}_0$ je funkce $z \mapsto z^n$ spojitém (dokonce holomorfním) rozšířením m_n do $\mathbb{C}$.
 - Občas se používá symbol z^a pro označení $m_a(z)$.
 - Označme $\sqrt{z} = \begin{cases} m_{\frac{1}{2}}(z), & \text{je-li } z \neq 0, \\ 0, & \text{je-li } z = 0. \end{cases}$
 - $\sqrt{z}$ koinciduje na reálných nezáporných číslech s reálnou odmocninou.

Obecná mocnina

Příklad

- 1 $\sqrt{e^{2\pi i}} \neq e^{i\pi}$. Tedy obecně $m_a(e^z)$ se nerovná e^{az} .
- 2 $M_{\frac{1}{2}}(-1) = \{-i, i\}$ a $\sqrt{-1} = i$.
- 3 $\sqrt{-1}\sqrt{-1} \neq \sqrt{(-1)(-1)}$.
- 4 Ať $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $b, c \in \mathbb{C}$. Pak $az^2 + bz + c = 0$ právě tehdy, když $z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Věta (derivace hlavní hodnoty a -té mocniny)

Ať $a \in \mathbb{C}$. Komplexní funkce $m_a(z)$ je holomorfní na

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = 0\}$$

a pro každé $z \in \Omega$ platí $m'_a(z) = am_{a-1}(z)$.

Důkaz: Viz přednáška. ■