

Komplexní analýza a transformace

Mocninné řady

Martin Bohata

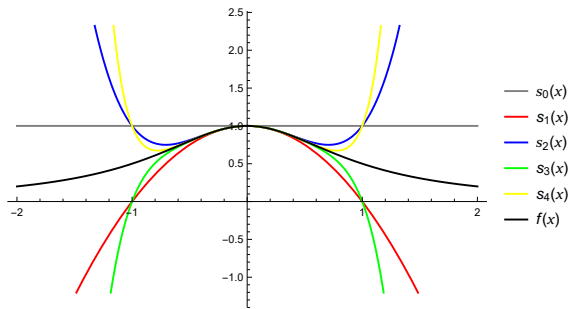
Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
martin.bohata@fel.cvut.cz

Motivace

- Protože $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ pro každé $x \in (-1, 1)$, je

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad x \in (-1, 1).$$

- Proč mimo interval $(-1, 1)$ řada nekonverguje, když je funkce $\frac{1}{1+x^2}$ třídy C^∞ na $\mathbb{R}$?



$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k}, \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Řady komplexních čísel

- $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \dots$ (nekonečná) **řada komplexních čísel** $a_n \in \mathbb{C}$.
- $(\sum_{k=0}^n a_k)_{n=0}^{+\infty} \dots$ **posloupnost částečných součtů řady** $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.
- Číslo $s \in \mathbb{C}$ se nazývá **součet řady** $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ komplexních čísel, má-li její posloupnost částečných součtů konečnou limitu s . Píšeme $s = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.
- Říkáme, že řada komplexních čísel **konverguje**, jestliže existuje její součet.

Tvrzení (nutná podmínka konvergence)

Jestliže $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Řady komplexních čísel

Definice (absolutní konvergence)

Říkáme, že řada $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ **konverguje absolutně**, jestliže $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ konverguje.

Tvrzení (o vztahu konvergence a absolutní konvergence)

Jestliže řada komplexních čísel konverguje absolutně, potom konverguje.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Tvrzení (srovnávací kritérium)

Nechť $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ je řada komplexních čísel. Jestliže řada $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ nezáporných reálných čísel konverguje a $|a_n| \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$, pak $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ konverguje absolutně.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Řady komplexních čísel

Tvrzení (podílové kritérium)

Nechť $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ je řada nenulových komplexních čísel a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \in [0, +\infty].$$

- ❶ Jestliže $L < 1$, pak $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ konverguje absolutně.
- ❷ Jestliže $L > 1$, pak $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ nekonverguje.

Důkaz: Vynecháváme. (Důkaz stejný jako v reálném oboru.) ■

Příklad

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!}$ konverguje absolutně.

Řady komplexních čísel

Tvrzení (odmocninové kritérium)

Nechť $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ je řada komplexních čísel a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \in [0, +\infty].$$

- ① Jestliže $L < 1$, pak $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ konverguje absolutně.
- ② Jestliže $L > 1$, pak $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ nekonverguje.

Důkaz: Vynecháváme. (Důkaz stejný jako v reálném oboru.) ■

- Připomeňme, že $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Příklad

$\sum_{n=0}^{+\infty} n(1+i)^n$ nekonverguje.

Posloupnosti komplexních funkcí

Definice (konvergence posloupnosti funkcí)

Ať $f_n : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ a $M \subseteq D$. Řekneme, že posloupnost $(f_n)_{n=0}^{+\infty}$ **konverguje na M** , existuje-li $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ tak, že

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(z) = f(z), \quad \text{pro každé } z \in M.$$

V takovém případě se f nazývá **limita posloupnosti $(f_n)_{n=0}^{+\infty}$ na M** .

Příklad

Je dána posloupnost funkcí

$$f_n(z) = \min\{n|z|, 1\}, \quad |z| \leq 1.$$

Všechny funkce f_n jsou spojité, ale limita posloupnosti $(f_n)_{n=0}^{+\infty}$ na $\overline{U(0;1)}$ je **nespojité** funkce

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(z) = \chi_{\overline{U(0;1)} \setminus \{0\}}(z)$$

Posloupnosti komplexních funkcí

Definice (stejnomořná konvergence)

Ať $f_n : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ a $M \subseteq D$. Řekneme, že posloupnost $(f_n)_{n=0}^{+\infty}$ **konverguje stejnoměrně na M** , existuje-li $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ tak, že

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{z \in M} |f_n(z) - f(z)| = 0.$$

V takovém případě se funkce f se nazývá **stejnomořná limita posloupnosti $(f_n)_{n=0}^{+\infty}$ na M** .

Příklad

Posloupnost $(f_n)_{n=0}^{+\infty}$ komplexních funkcí $f_n(z) = \min\{n|z|, 1\}$, $|z| \leq 1$,

- nekonverguje stejnoměrně na $\overline{U(0;1)}$ nebo $\overline{U(0;1)} \setminus \{0\}$;
- konverguje stejnoměrně na $M_r = \{z \in \mathbb{C} \mid r \leq |z| \leq 1\}$ pro každé $r > 0$.

Věta (spojitost a stejnoměrná konvergence)

Jestliže $(f_n)_{n=0}^{+\infty}$ je posloupnost komplexních funkcí f_n spojitých na $M \subseteq \mathbb{C}$ a $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ je její stejnoměrná limita na M , potom f je spojitá funkce.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Věta (záměna limity a křivkového integrálu)

Jestliže $(f_n)_{n=0}^{+\infty}$ je posloupnost komplexních funkcí f_n spojitých na křivce $C \subseteq \mathbb{C}$ a $f : C \rightarrow \mathbb{C}$ je její stejnoměrná limita na C , potom

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_C f_n(z) \, dz = \int_C f(z) \, dz$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Řady komplexních funkcí

Ať $(f_n)_{n=0}^{+\infty}$ je posloupnost komplexních funkcí $f_n : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $M \subseteq D$
a $f : M \rightarrow \mathbb{C}$.

- $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \dots$ **nekonečná řada komplexních funkcí f_n** .
- $(\sum_{k=0}^n f_k)_{n=0}^{+\infty} \dots$ **posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$** .
- Řekneme, že $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ **konverguje** (resp. **konverguje absolutně**) **na M** , jestliže řada $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ komplexních čísel konverguje (resp. konverguje absolutně) pro každé $z \in M$.
- Funkce f se nazve **součet řady $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ na M** , jestliže f je limitou posloupnosti částečných součtů řady $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ na M . Píšeme $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$.
- Řekneme, že $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ **konverguje stejnoměrně na M** , jestliže posloupnost jejích částečných součtů konverguje stejnoměrně na M .

Řady komplexních funkcí

Věta (Weierstrassovo kritérium)

Ať $D \subseteq \mathbb{C}$, množina $M \subseteq D$ je neprázdná, $(f_n)_{n=0}^{+\infty}$ je posloupnost komplexních funkcí $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ existuje kladné reálné číslo λ_n tak, že pro každé $z \in M$ je $|f_n(z)| \leq \lambda_n$. Jestliže $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n$ konverguje, potom $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na M .

Důkaz: Viz přednáška. ■

Věta (záměna řady a křivkového integrálu)

Jestliže řada $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ komplexních funkcí spojitých na křivce $C \subseteq \mathbb{C}$ konverguje stejnoměrně na C , pak její součet je spojitá funkce na C a platí

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_C f_n(z) \, dz = \int_C \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z) \, dz.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad (Geometrická řada)

Je dána mocninná řada $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$.

- Pro každé $z \in \mathbb{C}$ splňující $|z| \geq 1$ uvedená řada nekonverguje.
- Pro každé $z \in \mathbb{C}$ splňující $|z| < 1$ uvedená řada konverguje absolutně a platí

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

- Nekonverguje stejnoměrně na $U(0; 1)$. Avšak konverguje stejnoměrně na $U(0; r)$ pro každé $r \in (0, 1)$.

Definice (mocninná řada)

Ať $z_0 \in \mathbb{C}$ a $a_n \in \mathbb{C}$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$. **Mocninná řada se středem z_0 a koeficienty a_n** je řada komplexních funkcí $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$, tj. jedná se o řadu tvaru

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Tvrzení (o konvergenci mocninné řady)

Konverguje-li řada $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ v bodě $w \in \mathbb{C}$, pak absolutně konverguje na množině $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < |w - z_0|\}$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Definice (poloměr konvergence)

Poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ je číslo

$$R = \sup \left\{ r \in [0, +\infty) \mid \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n \text{ konverguje} \right\} \in [0, +\infty].$$

Množina $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ se nazývá **kruh konvergence** mocninné řady $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$.

- Pro $R \in (0, +\infty)$ je kruh konvergence okolí $U(z_0; R)$.
- Kruh konvergence budeme značit $U(z_0; R)$ i pro $R = +\infty$.

Konvergence mocninné řady

Věta (význam poloměru konvergence)

Má-li mocninná řada $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ poloměr konvergence R , potom

- ① konverguje absolutně pro každé $z \in \mathbb{C}$ splňující $|z - z_0| < R$;
- ② pro každé $z \in \mathbb{C}$ splňující $|z - z_0| > R$ nekonverguje.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

- ① $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n}{i^n} (z - 1 + 2i)^n \dots R = 0.$
- ② $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n} \dots R = 1.$
- ③ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \dots R = +\infty.$

Věta (stejněměrná konvergence mocninné řady)

Má-li mocninná řada $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ poloměr konvergence $R > 0$, pak konverguje stejnoměrně na $U(z_0, r)$ pro každé $r \in (0, R)$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Operace s mocninnými řadami

Tvrzení (součet mocninných řad)

At' $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ má poloměr konvergence $R_1 > 0$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z - z_0)^n$ má poloměr konvergence $R_2 > 0$ a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad z \in U(z_0; R_1),$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z - z_0)^n, \quad z \in U(z_0; R_2).$$

Potom $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)(z - z_0)^n$ má poloměr konvergence nejméně $R = \min\{R_1, R_2\}$ a

$$f(z) + g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)(z - z_0)^n, \quad z \in U(z_0; R).$$

Důkaz: Viz přednáška. 

Věta (derivování člen po členu)

Jestliže mocninná řada $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ má poloměr konvergence $R > 0$ a f je její součet na $U(z_0; R)$, potom

- ❶ $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}$ má poloměr konvergence R ;
- ❷ f je holomorfní na $U(z_0; R)$ a $f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}$ pro každé $z \in U(z_0; R)$;
- ❸ $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Důsledek (princip neurčitých koeficientů)

Jestliže $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ a $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z - z_0)^n$ mají stejný součet na nějakém okolí $U(z_0)$, pak $a_n = b_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

- Koeficienty mocninné řady jsou určeny jen chováním jejího součtu na libovolně malém okolí bodu z_0 .

Příklad

Je dána rovnice $f'(z) = 2zf(z)$ a počáteční podmínka $f(0) = 1$. Její řešení (na $\mathbb{C}$) je $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{n!}$.

Věta (integrování člen po členu)

Jestliže mocninná řada $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ má poloměr konvergence $R > 0$ a f je její součet na $U(z_0; R)$, potom

- 1 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$ má poloměr konvergence R ;
- 2 Součet F mocninné řady $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$ na $U(z_0; R)$ je primitivní funkce k funkci f na $U(z_0; R)$, tj. $F' = f$ na $U(z_0; R)$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

- 1 Řada $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)z^n$ má součet $\frac{1}{(1-z)^2}$ pro $|z| < 1$.
- 2 Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$ má součet $-\ln(1-z)$ pro $|z| < 1$.

Reprezentace holomorfní funkce mocninnou řadou

Definice (Taylorova řada)

Ať funkce f má derivace všech řádů v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$. Mocninná řada $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$ se nazývá **Taylorova řada funkce f o středu z_0** .

Věta (existence Taylorova rozvoje)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a $R > 0$ je takové, že $f(z)$ je holomorfní funkce na $U(z_0; R)$. Potom

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

pro všechna $z \in U(z_0; R)$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Reprezentace holomorfní funkce mocninnou řadou

- Taylorova řada z právě uvedené věty se také někdy nazývá **rozvoj funkce f do mocninné řady** na $U(z_0; R)$.
- Holomorfní funkce jsou lokálně „nekonečné polynomy“.

Příklad

- 1 $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, z \in \mathbb{C}.$
- 2 $\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, z \in \mathbb{C}.$
- 3 $\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, z \in \mathbb{C}.$
- 4 $\ln z = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$ pro $|z-1| < 1.$
- 5 $\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n}$ pro $|z| < 1.$

Operace s mocninnými řadami – pokračování

Tvrzení (součin mocninných řad)

At' $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ má poloměr konvergence $R_1 > 0$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z - z_0)^n$ má poloměr konvergence $R_2 > 0$, $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad z \in U(z_0; R_1),$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z - z_0)^n, \quad z \in U(z_0; R_2).$$

Potom $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$ má poloměr konvergence nejméně $R = \min\{R_1, R_2\}$ a

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad z \in U(z_0; R).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Kořeny holomorfní funkce

- Připomeňme, že $z_0 \in \mathbb{C}$ je kořen násobnosti $k \in \mathbb{N}$ nenulového polynomu P právě tehdy, když existuje polynom Q tak, že $P(z) = (z - z_0)^k Q(z)$ a $Q(z_0) \neq 0$.

Definice (kořen násobnosti k)

Ať $z_0 \in \mathbb{C}$, f je holomorfní funkce na okolí $U(z_0)$ a $k \in \mathbb{N}$. Řekneme, že z_0 je **kořen násobnosti k funkce f** , jestliže existuje funkce g holomorfní na $U(z_0)$ tak, že

- 1 $g(z_0) \neq 0$;
- 2 $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$ pro každé $z \in U(z_0)$.

- Je-li z_0 kořen násobnosti k funkce f , potom existuje $P(z_0)$ tak, že $f(z) \neq 0$ pro každé $z \in P(z_0)$.
- Je-li z_0 kořen násobnosti k funkce f a také kořen násobnosti l funkce g , pak z_0 je kořen násobnosti $k + l$ funkce fg .

Kořeny holomorfní funkce

Je-li f holomorfní na $U(z_0)$ a $f(z_0) = 0$, pak nastává právě jedna z možností:

- 1 z_0 je kořen násobnosti $k \in \mathbb{N}$ funkce f ;
- 2 $f(z) = 0$ na $U(z_0)$.

Tvrzení (derivace a kořen násobnosti k)

Ať $z_0 \in \mathbb{C}$, f je holomorfní funkce na okolí $U(z_0)$ a $k \in \mathbb{N}$. Potom z_0 je kořen násobnosti k funkce f právě tehdy, když $f^{(l)}(z_0) = 0$ pro každé celé nezáporné číslo $l < k$ a $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

- 1 Bod 0 je kořen násobnosti 2 funkce $f(z) = z \sin z$.
- 2 Bod $2k\pi i$, kde $k \in \mathbb{Z}$, je kořen násobnosti 1 funkce $f(z) = 1 - e^z$.

Věta (o jednoznačnosti)

At' f, g jsou holomorfní funkce na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ a $M \subseteq \Omega$ má hromadný bod ležící v Ω . Jestliže $f = g$ na M , pak $f = g$ na Ω .

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

Pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.