

Komplexní analýza a transformace

Laurentovy řady

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
martin.bohata@fel.cvut.cz

Laurentovy řady – motivace

Uvažme funkci

$$f(z) = \frac{1}{z-1}.$$

- Funkce $f(z)$ má rozvoj do mocninné řady ve tvaru

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

pro $|z| < 1$.

- Funkce $f(z)$ je ale definovaná i pro $|z| > 1$. Má pro taková z rozvoj do řady obsahující mocniny z^n ?
- Pokud připustíme i záporné mocniny, tak má, protože

$$f(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$$

pro $|z| > 1$.

Laurentovy řady

Definice (Laurentova řada)

① Řada

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

se nazývá **Laurentova řada** se středem $z_0 \in \mathbb{C}$ a koeficienty $a_n \in \mathbb{C}$.

② Řada

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

se nazývá **regulární část** Laurentovy řady $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$.

③ Řada

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

se nazývá **hlavní část** Laurentovy řady $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$.

Definice (konvergence Laurentovy řady)

Ať $M \subseteq \mathbb{C}$.

- Řekneme, že Laurentova řada **konverguje na M** (resp. **absolutně konverguje na M**), jestliže na M konverguje (resp. absolutně konverguje) současně její hlavní a regulární část.
- Ať Laurentova řada konverguje na M , funkce s_r je součet její regulární části na M a funkce s_h je součet její hlavní části na M . Potom se funkce $s_r + s_h$ nazve **součtem** Laurentovy řady na M .
- Je-li $f(z)$ součet Laurentovy řady $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ na M , pak píšeme

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad z \in M.$$

- Ať $0 \leq r < R \leq +\infty$ a $z_0 \in \mathbb{C}$. Množina

$$P(z_0; r; R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$$

se nazve **mezikruž**í o středu z_0 , vnitřním poloměru r a vnějším poloměru R .

Příklad

- 1 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^{|n|}} (z - i)^n$ konverguje na $P(i; \frac{1}{2}; 2)$. Její součet na $P(i; \frac{1}{2}; 2)$ je $f(z) = \frac{1}{2(z-i)-1} + \frac{2}{2-(z-i)}$.
- 2 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^n$ nekonverguje na žádné neprázdné množině $M \subseteq \mathbb{C}$.

Věta (o konvergenci Laurentovy řady)

At' $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ je Laurentova řada. Pak existují $r, R \in [0, +\infty]$ tak, že

- ① $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ konverguje absolutně pro $|z - z_0| < R$
a nekonverguje pro $|z - z_0| > R$;
- ② $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n$ konverguje absolutně pro $|z - z_0| > r$
a nekonverguje pro $|z - z_0| < r$.

Je-li $r < R$, pak $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ konverguje absolutně na mezikruží $P(z_0; r; R)$ a její součet je holomorfní funkce na tomto mezikruží.

Důkaz: Viz přednáška. ■

- $P(z_0; r; R)$ z předchozího tvrzení se nazývá **mekruží konvergence** Laurentovy řady.

Věta (rozvoj do Laurentovy řady)

Nechť funkce f je holomorfní na mezikruží $P(z_0; r; R)$, kde $z_0 \in \mathbb{C}$ a $0 \leq r < R \leq +\infty$. Potom existuje právě jedna Laurentova řada $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ se součtem $f(z)$ na $P(z_0; r; R)$. Navíc pro každé $n \in \mathbb{Z}$ platí

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

kde C je libovolná kladně orientovaná Jordanova křivka, která leží v $P(z_0; r; R)$ a má ve svém vnitřku bod z_0 .

Důkaz: Vynecháváme. ■

- Laurentova řada z předchozí věty se nazývá **Laurentův rozvoj** funkce f na $P(z_0; r; R)$.

Příklad

$$\textcircled{1} \quad \frac{e^z}{z} = \sum_{n=-1}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} \text{ na } P(0; 0; +\infty).$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{1}{z(1-z)} = \sum_{n=-1}^{+\infty} z^n \text{ na } P(0; 0; 1).$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{1}{z(1-z)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{-2} -z^n \text{ na } P(0; 1; +\infty).$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{1}{z(1-z)} = \sum_{n=-1}^{+\infty} (-1)^n (z-1)^n \text{ na } P(1; 0; 1).$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{3}{z(3-z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}} \text{ na } P(1; 1; 2).$$

Izolované singularity

Definice (izolovaná singularita)

Řekneme, že $z_0 \in \mathbb{C}$ je **izolovaná singularita** funkce f , jestliže f je holomorfní na nějakém prstencovém okolí $P(z_0)$ bodu z_0 a v bodě z_0 nemá derivaci.

Příklad

- 1 Bod 0 je izolovaná singularita funkce $\frac{\sin z}{z}$.
- 2 Bod 0 je izolovaná singularita funkce $\frac{1}{z}$.
- 3 Bod 2 je izolovaná singularita funkce $\frac{1}{(z-2)^5}$.
- 4 Bod 0 je izolovaná singularita funkce $e^{\frac{1}{z}}$.
- 5 Bod 0 není izolovaná singularita funkce $\ln z$.

Izolované singularity

Definice (typy izolovaných singularit)

Ať $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovaná singularita funkce f a $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ na $P(z_0)$.

- 1 Řekneme, že z_0 je **odstranitelná singularita** funkce f , jestliže $a_n = 0$ pro každé $n < 0$.
- 2 Řekneme, že z_0 je **pól** funkce f , jestliže existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že $a_{-k} \neq 0$ a $a_n = 0$ pro každé $n < -k$. Číslo k se nazývá **řád** (nebo také **násobnost**) pólu.
- 3 Řekneme, že z_0 je **podstatná singularita** funkce f , jestliže $a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho záporných celých čísel n .

Terminologie:

- Pól řádu k se také nazývá **k -násobný pól**.
- Pól řádu 1 se také nazývá **jednoduchý pól**.

Izolované singularity

Příklad

- 1 Bod 0 je odstranitelná singularita funkce $\frac{\sin z}{z}$.
- 2 Bod 0 je pól řádu 1 funkce $\frac{1}{z}$.
- 3 Bod 2 je pól řádu 5 funkce $\frac{1}{(z-2)^5}$.
- 4 Bod 0 je podstatná singularita funkce $e^{\frac{1}{z}}$.

Tvrzení

Ať $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovaná singularita funkce f .

- 1 Bod z_0 je odstranitelná singularita funkce f právě tehdy, když existuje funkce g holomorfní na $U(z_0)$ taková, že $f(z) = g(z)$ na $P(z_0)$.
- 2 Bod z_0 je pól řádu $k \in \mathbb{N}$ funkce f právě tehdy, když existuje funkce g holomorfní na $U(z_0)$ taková, že $g(z_0) \neq 0$ a $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}$ na $P(z_0)$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Izolované singularity

Tvrzení

Ať $z_0 \in \mathbb{C}$, funkce f a g jsou holomorfní na okolí $U(z_0)$ a bod z_0 je kořen násobnosti n funkce g .

- 1 Jestliže $f(z_0) \neq 0$, pak z_0 je pól řádu n funkce $\frac{f}{g}$.
- 2 Jestliže z_0 je kořen násobnosti $m < n$ funkce f , pak z_0 je pól řádu $n - m$ funkce $\frac{f}{g}$.
- 3 Jestliže z_0 je kořen násobnosti $m \geq n$ funkce f , pak z_0 je odstranitelná singularita funkce $\frac{f}{g}$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

Je dána funkce $f(z) = \frac{z^2}{\sin^3(\pi z)}$. Bod 0 je pól řádu 1 funkce f a body $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ jsou póly řádu 3 funkce f .

Izolované singularity

Příklad

Je dána funkce $f(z) = \frac{1}{1-e^{\frac{1}{z}}}$. Body $\frac{1}{2n\pi i}$, kde $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, jsou póly řádu 1 funkce f . Bod 0 není izolovanou singularitou funkce f .

Věta (charakterizace typů izolovaných singularit)

Ať $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovaná singularita funkce f a $k \in \mathbb{N}$.

- 1 Bod z_0 je odstranitelná singularita funkce f právě tehdy, když $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ je konečná.
- 2 Bod z_0 je pól funkce f právě tehdy, když $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$. Navíc je bod z_0 pól řádu k funkce f právě tehdy, když $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z)$ je konečná nenulová.
- 3 Bod z_0 je podstatná singularita funkce f právě tehdy, když $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ neexistuje.

Důkaz: Viz přednáška.

Mějme holomorfní funkci $f(z)$ na $P(z_0)$. Nechť C je kladně orientovaná Jordanova křivka ležící v $P(z_0)$ taková, že $z_0 \in \text{Int } C$.

- Jak vypočítat $\int_C f(z) dz$?
- Informace o $\int_C f(z) dz$ je skryta v Laurentově rozvoji funkce f na $P(z_0)$.
- Víme, že $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$. Proto

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i a_{-1}.$$

Definice (reziduum)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovaná singularita funkce f a

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

na $P(z_0)$. Koeficient a_{-1} se nazývá **reziduum** funkce f v bodě z_0 a značí se $\operatorname{res}_{z_0} f(z)$.

- Je-li z_0 odstranitelná singularita funkce f , pak $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = 0$.

Příklad

- 1 $\operatorname{res}_1 \frac{1}{(z-1)^3} = 0$.
- 2 $\operatorname{res}_0 \frac{e^z}{z^2} = 1$.
- 3 $\operatorname{res}_1 \frac{1}{z-z^2} = -1$.

Tvrzení

Jestliže $z_0 \in \mathbb{C}$ je pól řádu $k \in \mathbb{N}$ funkce f , potom

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(z - z_0)^k f(z) \right]^{(k-1)}.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

- Speciálně je-li z_0 pól řádu 1 funkce f , pak

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

Příklad

Nechť $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)^2}$.

- 1 $\operatorname{res}_1 f(z) = \frac{1}{4}$.
- 2 $\operatorname{res}_{-1} f(z) = -\frac{1}{4}$.

Věta (l'Hospitalovo pravidlo)

*Ať $z_0 \in \mathbb{C}$ a funkce f a g jsou holomorfní a ne všude nulové na $U(z_0)$.
Jestliže $f(z_0) = g(z_0) = 0$, pak*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

Příklad

$$\operatorname{res}_0 \frac{e^{z^2} - \cos z}{z^2 \sin z} = \frac{3}{2}.$$

Tvrzení

Ať $z_0 \in \mathbb{C}$ a funkce f a g jsou holomorfní na $U(z_0)$. Jestliže z_0 je jednonásobný kořen funkce g , potom

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

$$\operatorname{res}_{\pi} \frac{z^{10}}{1+e^{iz}} = i\pi^{10}.$$