

Komplexní analýza a transformace

Reziduová věta a její aplikace

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
martin.bohata@fel.cvut.cz

Reziduová věta

Věta (Reziduová věta)

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast, C je kladně orientovaná Jordanova křivka ležící v Ω a $S \subseteq \text{Int } C$ je konečná množina. Jestliže f je holomorfní na $\Omega \setminus S$ a body z množiny S jsou izolované singularity funkce f , potom

$$\int_C f(z) \, dz = 2\pi i \sum_{w \in S} \text{res}_w f(z).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

Ať C je kladně orientovaná hranice obdélníku o vrcholech $-i$, $4 - i$, $4 + i$, i . Pak

$$\int_C \frac{1}{(z-1)(z-3)(z-5)^2} \, dz = \frac{3\pi i}{16}.$$

Hlavní hodnota integrálu

- Lebesgueovy integrály $\int_{-\infty}^{+\infty} x \, dx$ a $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} \, dx$ neexistují, ale

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R x \, dx = 0, \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{r \rightarrow 0+} \int_{[-R, -r] \cup [r, R]} \frac{1}{x} \, dx = 0.$$

- Ať $S \subseteq \mathbb{R}$ je konečná množina a $f : \mathbb{R} \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ je (lebesgueovsky) integrovatelná na $M(R; r) := [-R, R] \setminus \bigcup_{x \in S} U(x; r)$ pro každé $R, r > 0$. Potom

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx := \lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{r \rightarrow 0+} \int_{M(R; r)} f(x) \, dx$$

se nazve **hlavní hodnota integrálu** f přes $\mathbb{R}$.

- Je-li $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ integrovatelná na $\mathbb{R}$, pak

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx.$$

- V dalším budeme místo p.v. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx$ psát jen $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx$.

Integrály z racionálních funkcí

Věta

Nechť P a Q jsou polynomy a

$$S_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) = 0, \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Jestliže $1 + \operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$ a Q nemá žádný reálný kořen, potom

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{w \in S_+} \operatorname{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx = \frac{\pi}{6}.$$

Integrály obsahující oscilující exponenciálu

Tvrzení (Jordanovo lemma)

Ať $r > 0$, f je komplexní funkce spojitá na

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0\} \cap U(\infty; r)$$

*a pro každé $R > r$ je C_R křivka s parametrizací $\varphi_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$.
Je-li $\alpha > 0$ a*

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \max_{z \in C_R} |f(z)| = 0,$$

potom

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} f(z) e^{i\alpha z} dz = 0.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Integrály obsahující oscilující exponenciálu

Věta

Nechť P a Q jsou polynomy takové, že $\text{st } P < \text{st } Q$ a Q nemá žádný reálný kořen.

❶ Jestliže $\alpha > 0$ a $S_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) = 0, \text{Im } z > 0\}$, pak

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{w \in S_+} \text{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}.$$

❷ Jestliže $\alpha < 0$ a $S_- = \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) = 0, \text{Im } z < 0\}$, pak

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx = -2\pi i \sum_{w \in S_-} \text{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Integrály obsahující oscilující exponenciálu

Příklad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 - 4x + 5} dx = \pi e^{2i-1}.$$

Odtud

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 4x + 5} dx = \frac{\pi \sin 2}{e},$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 - 4x + 5} dx = \frac{\pi \cos 2}{e}.$$

Tvrzení

At' $z_0 \in \mathbb{C}$ je pól řádu 1 funkce f a pro každé $r > 0$ je C_r křivka s parametrizací $\varphi(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$, kde $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$. Pak

$$\lim_{r \rightarrow 0+} \int_{C_r} f(z) dz = i(\beta - \alpha) \operatorname{res}_{z_0} f(z).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Obcházení jednoduchých pólů

Tvrzení

Ať P a Q jsou polynomy takové, že Q má na reálné ose pouze kořeny násobnosti 1 a $1 + \text{st } P < \text{st } Q$. Jestliže

$$S_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) = 0, \text{Im } z > 0\},$$

$$S_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) = 0, \text{Im } z = 0\},$$

potom

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{w \in S_+} \text{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)} + i\pi \sum_{w \in S_0} \text{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

Obcházení jednoduchých pólů

Tvrzení

At' P a Q jsou polynomy takové, že Q má na reálné ose pouze kořeny násobnosti 1 a $\text{st } P < \text{st } Q$. At'

$$S_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) = 0, \text{Im } z > 0\},$$

$$S_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) = 0, \text{Im } z = 0\},$$

$$S_- = \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) = 0, \text{Im } z < 0\}.$$

❶ *Jestliže $\alpha > 0$, pak*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{w \in S_+} \text{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} + i\pi \sum_{w \in S_0} \text{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}.$$

❷ *Jestliže $\alpha < 0$, pak*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx = -2\pi i \sum_{w \in S_-} \text{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} - i\pi \sum_{w \in S_0} \text{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}.$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

Příklad

1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x(x^2 + 1)} dx = 0.$$

2

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

Princip argumentu

Věta (Princip argumentu)

Ať $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast a $S \subseteq \Omega$ je konečná množina, f je holomorfní funkce na $\Omega \setminus S$ a každý bod S je pólem funkce f . Jestliže $C \subseteq \Omega \setminus S$ je kladně orientovaná Jordanova křivka taková, že $f(z) \neq 0$ pro každé $z \in C$, pak

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_f - P_f,$$

kde N_f , resp. P_f , je počet (počítáno včetně násobností) kořenů, resp. pólů, funkce f v $\text{Int } C$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

- $N_f - P_f = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f$, kde $\Delta_C \arg f$ je celková změna argumentu $f(z)$, která nastane proběhnutím C v kladném směru.
- Ať $f(z) = z^2 + z$ a $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$. Pak $N_f - P_f = 2$ a $\Delta_C \arg f = 4\pi$.
- Matematický základ pro Nyquistovo kritérium stability.