Komplexní analýza a transformace

Z-transformace

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
martin.bohata@fel.cvut.cz

Motivace a definice

- Studium diskrétních signálů (tj. posloupností).
- Chceme diskrétní signál „zakódovat“ do holomorfní funkce.
- Aplikace: Řešení diferenčních rovnic, zpracování signálu, ...

Definice (Z-transformace)

Nechť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost komplexních čísel. Existuje-li $r \in [0, +\infty)$ tak, že řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

má mezikruží konvergence $P(0; r; +\infty)$, pak se její součet na tomto mezikruží nazývá **Z-transformace** posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

Značení: Z-transformaci posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ budeme značit velkým písmenem (např. $A(z), \dots$) nebo symbolem $\mathscr{Z}[a_n](z)$.

Jednoduché příklady

Příklad

1. Nechť $\alpha \in \mathbb{C}$. Pak
$$\mathscr{Z}\left[\alpha^n\right](z) = \frac{z}{z-\alpha}$$
pro $|z| > |\alpha|$. Speciálně
$$\mathscr{Z}\left[1\right](z) = \frac{z}{z-1}$$
pro $|z| > 1$.
2. $$\mathscr{Z}\left[\frac{1}{n!}\right](z) = e^{\frac{1}{z}}$$
pro $|z| > 0$.
3. Je-li $(a_n)_{n=0}^{+\infty} = (1, 0, 0, 0, \dots)$, pak $\mathscr{Z}\left[a_n\right](z) = 1$ pro $|z| > 0$.

Prostor Z_0

Jaké posloupnosti mají Z-transformaci?

Definice

Řekneme, že posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ komplexních čísel je **exponenciálního řádu**, jestliže existuje $M > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že $|a_n| \leq Me^{\alpha n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$.
Symbolem Z_0 označíme množinu všech komplexních posloupností exponenciálního řádu.

Věta (o existenci)

Z-transformace posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ komplexních čísel existuje právě tehdy, když $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Prostor Z_0

Množina Z_0 je uzavřená na

- lineární kombinace;
- (konečné) součiny.

Příklad

1. Každá omezená posloupnost je v Z_0.
2. Je-li P polynom, pak $(P(n))_{n=0}^{\infty} \in Z_0$.
3. $(n!)_{n=0}^{\infty} \notin Z_0$.

Základní vlastnosti

Tvrzení

Nechť $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ *a* $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. $\mathscr{Z}\left[a_n + \alpha b_n\right](z) = \mathscr{Z}\left[a_n\right](z) + \alpha \mathscr{Z}\left[b_n\right](z)$.
2. *Jestliže* $\alpha \neq 0$, *pak* $\mathscr{Z}\left[\alpha^n a_n\right](z) = \mathscr{Z}\left[a_n\right]\left(\frac{z}{\alpha}\right)$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

1. Nechť $\omega \in \mathbb{C}$. Pak

$$\mathscr{Z}\left[\sin(\omega n)\right](z) = \frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1},$$
$$\mathscr{Z}\left[\cos(\omega n)\right](z) = \frac{z^2 - z \cos \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}.$$

2. $\mathscr{Z}\left[3 - \frac{2^n}{n!}\right](z) = \frac{3z}{z-1} - e^{\frac{2}{z}}$.

Věta (derivace obrazu)

Jestliže $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$, *pak*

$$\mathscr{Z}\left[na_n\right](z) = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathscr{Z}\left[a_n\right](z).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

1. $$\mathscr{Z}\left[n\right](z) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$
2. $$\mathscr{Z}\left[n^2\right](z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}.$$

Věta (obraz posunutí)

Ať $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$, $k \in \mathbb{N}$ *a*

$$b_n = \begin{cases} a_{n-k} & \text{pro } n \geq k, \\ 0 & \text{pro } 0 \leq n < k. \end{cases}$$

Potom

1. $$\mathscr{Z}\left[b_n\right](z) = \frac{1}{z^k}\mathscr{Z}\left[a_n\right](z).$$

2. $$\mathscr{Z}\left[a_{n+k}\right](z) = z^k\left[\mathscr{Z}\left[a_n\right](z) - \sum_{n=0}^{k-1}\frac{a_n}{z^n}\right].$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

1. Je-li $(a_n)_{n=0}^{+\infty} = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, ...)$, pak

$$\mathscr{Z}\left[a_n\right](z) = \frac{1}{z^3(z-1)}.$$

2. $$\mathscr{Z}\left[\frac{1}{(n+3)!}\right](z) = z^3 e^{\frac{1}{z}} - z^3 - z^2 - \frac{1}{2}z.$$

3. Nechť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je komplexní posloupnost, jejíž Z-transformace je $F(z)$. Pak Z-transformace diference $\Delta(a_n)_{n=0}^{\infty} := (a_{n+1} - a_n)_{n=0}^{\infty}$ posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je

$$\mathscr{Z}\left[a_{n+1} - a_n\right](z) = (z-1)F(z) - za_0.$$

Konvoluce – motivace

Ať $L : Z_0 \to Z_0$ je

1. lineární (a spojité):

$$L\left(\alpha_0 \left(a_n^{(0)}\right)_{n=0}^{+\infty} + \alpha_1 \left(a_n^{(1)}\right)_{n=0}^{+\infty} + \dots\right)$$
$$= \alpha_0 L\left(\left(a_n^{(0)}\right)_{n=0}^{+\infty}\right) + \alpha_1 L\left(\left(a_n^{(1)}\right)_{n=0}^{+\infty}\right) + \dots;$$

2. translačně invariantní:

$$L\left(T\left((a_n)_{n=0}^{+\infty}\right)\right) = T\left(L\left((a_n)_{n=0}^{+\infty}\right)\right),$$

kde $T\left((a_n)_{n=0}^{+\infty}\right) = (0, a_0, a_1, \dots)$.

Konvoluce – motivace

Označme

$$\delta_{jk} := \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

$$(b_n)_{n=0}^{+\infty} := L\left((\delta_{0n})_{n=0}^{+\infty}\right).$$

Protože

$$(a_n)_{n=0}^{+\infty} = a_0\,(\delta_{0n})_{n=0}^{+\infty} + a_1\,(\delta_{1n})_{n=0}^{+\infty} + a_2\,(\delta_{2n})_{n=0}^{+\infty} + \dots,$$

je odezva systému popsaného zobrazením L na vstup $(a_n)_{n=0}^{+\infty}$ posloupnost

$$\begin{aligned} &L\left((a_n)_{n=0}^{+\infty}\right) \\ &\quad = a_0 L\left((\delta_{0n})_{n=0}^{+\infty}\right) + a_1 L\left((\delta_{1n})_{n=0}^{+\infty}\right) + a_2 L\left((\delta_{2n})_{n=0}^{+\infty}\right) + \dots \\ &\quad = a_0 L\left((\delta_{0n})_{n=0}^{+\infty}\right) + a_1 L\left(T\,(\delta_{0n})_{n=0}^{+\infty}\right) + a_2 L\left(T^2\,(\delta_{0n})_{n=0}^{+\infty}\right) + \dots \\ &\quad = (a_0 b_0, a_0 b_1 + b_0 a_1, a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \dots). \end{aligned}$$

Konvoluce

Definice (konvoluce posloupností)

Konvoluce posloupností $(a_n)_{n=0}^{+\infty} \in Z_0$ a $(b_n)_{n=0}^{+\infty} \in Z_0$ je posloupnost $(c_n)_{n=0}^{\infty} = (a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty}$, jejíž prvky jsou

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}_0$.

Příklad

$$(1)_{n=0}^{\infty} * (a_n)_{n=0}^{\infty} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right)_{n=0}^{+\infty}.$$

Speciálně

$$(1)_{n=0}^{\infty} * (1)_{n=0}^{\infty} = (n+1)_{n=0}^{\infty}.$$

Konvoluce

Platí

- $(a_n)_{n=0}^{+\infty} * (b_n)_{n=0}^{+\infty} = (b_n)_{n=0}^{+\infty} * (a_n)_{n=0}^{+\infty}$;
- $(a_n)_{n=0}^{+\infty} * \left[(b_n)_{n=0}^{+\infty} * (c_n)_{n=0}^{+\infty}\right] = \left[(a_n)_{n=0}^{+\infty} * (b_n)_{n=0}^{+\infty}\right] * (c_n)_{n=0}^{+\infty}$.

Věta (obraz konvoluce)

Jestliže $(a_n)_{n=0}^{+\infty}, (b_n)_{n=0}^{+\infty} \in Z_0$, *potom* $(a_n)_{n=0}^{+\infty} * (b_n)_{n=0}^{+\infty} \in Z_0$ *a*

$$\mathscr{Z}\left[a_n * b_n\right](z) = \mathscr{Z}\left[a_n\right](z)\, \mathscr{Z}\left[b_n\right](z)$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

$$\mathscr{Z}\left[1 * 1\right](z) = \frac{z^2}{(z-1)^2}.$$

Inverzní Z-transformace

- Značení: $H_\infty \ldots$ množina všech holomorfních funkcí $f : \Omega \to \mathbb{C}$ takových, že $\Omega = P(0; r; +\infty)$ pro nějaké $r \in [0, +\infty)$, nelze je holomorfně prodloužit na větší mezikruží $P(0; \varrho; +\infty)$ a mají konečnou limitu v nekonečnu.

Věta (bijektivnost Z-transformace)

Z-transformace je bijekce množiny Z_0 na množinu H_∞.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Definice (inverzní Z-transformace)

Inverzní Z-transformace funkce $F \in H_\infty$ je posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ taková, že $\mathscr{Z}[a_n](z) = F(z)$. Symbolem $\mathscr{Z}^{-1}[F(z)](n)$ budeme značit n-tý prvek inverzní Z-transformace funkce F.

- Běžně budeme ztotožňovat funkce z H_∞ s jejich holomorfním rozšířením na co největší oblast v $\mathbb{C}$.

Inverzní Z-transformace

Možnosti nalezení inverzní Z-transformace funkce $F \in H_\infty$:

- rozvojem $F(z)$ do Laurentovy řady konvergující na $U(\infty)$.
- Integrální formulí:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(z) z^{n-1} \, \mathrm{d}z,$$

kde C je libovolná kladně orientovaná Jordanova křivka ležící v $U(\infty)$ (na kterém odpovídající Laurentova řada konverguje) a obsahující ve svém vnitřku nulu.
Integrál lze často vypočíst pomocí Reziduové věty.

- Využitím vzorce

$$a_n = \lim_{z \to \infty} z^n \left[F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{z^k} \right]$$

pro $n \in \mathbb{N}_0$. Užitečný je zejména vzorec pro koeficient a_0:

$$a_0 = \lim_{z \to \infty} F(z).$$

Inverzní Z-transformace

Příklad

1. Je-li
$$F(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)},$$
pak
$$a_0 = \mathscr{Z}^{-1}\left[F(z)\right](0) = 0,$$
$$a_n = \mathscr{Z}^{-1}\left[F(z)\right](n) = -1 + 2^{n-1} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

2. Je-li
$$F(z) = \sin\frac{1}{z},$$
pak
$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{pro } n \in \mathbb{N}_0 \text{ sudé}, \\ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n!}, & \text{pro } n \in \mathbb{N}_0 \text{ liché}. \end{cases}$$

Aplikace – diferenční rovnice

Příklad

Řešení diferenční rovnice

$$y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 0$$

splňující počáteční podmínky $y_0 = 1$ a $y_1 = 2$ je $(y_n)_{n=0}^{\infty}$, kde

$$y_n = 2^n$$

pro každé $n \in \mathbb{N}_0$.

Aplikace – diferenční rovnice

Příklad

Řešení diferenční rovnice

$$y_{n+2} + \sum_{k=0}^{n} 2^k y_{n-k} = 1$$

splňující počáteční podmínky $y_0 = y_1 = 0$ je $(y_n)_{n=0}^{\infty}$, kde

$$y_n = (n-1)\left(2 - \frac{n}{2}\right)$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Aplikace – teorie řízení

Uvažme systém popsaný soustavou

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{B}u_n,$$
$$y_n = \mathbf{C}\mathbf{x}_n,$$

kde $\mathbf{A} \in \mathbb{M}_k(\mathbb{C})$, $\mathbf{B} \in \mathbb{M}_{k,1}(\mathbb{C})$ a $\mathbf{C} \in \mathbb{M}_{1,k}(\mathbb{C})$ jsou matice a $(u_n)_{n=0}^{+\infty}$ je posloupnost komplexních čísel.

Terminologie:

- $(u_n)_{n=0}^{+\infty}$ ... **vstup**.
- $(\mathbf{x}_n)_{n=0}^{+\infty}$ ... **stav**.
- $(y_n)_{n=0}^{+\infty}$ ... **výstup**.
- **Impulzní odezva** je výstup $(h_n)_{n=0}^{+\infty}$ systému odpovídající vstupu $(u_n)_{n=0}^{+\infty} = (\delta_{0n})_{n=0}^{+\infty}$ a počáteční podmínce $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$.
- $H(z) = \mathscr{Z}[h_n](z)$ ... **přenosová funkce**.

Dále nebudeme rozlišovat mezi přenosovou funkcí a jejím holomorfním rozšířením na co největší oblast v $\mathbb{C}$.

Aplikace – teorie řízení

- Je-li dán vstup $(u_n)_{n=0}^{+\infty}$ a počáteční podmínky $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, pak Z-transformace výstupu je

$$Y(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(z).$$

  kde $U(z) = \mathscr{Z}\left[u_n\right](z)$.
- Přenosová funkce je proto racionální funkce tvaru

$$H(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}.$$

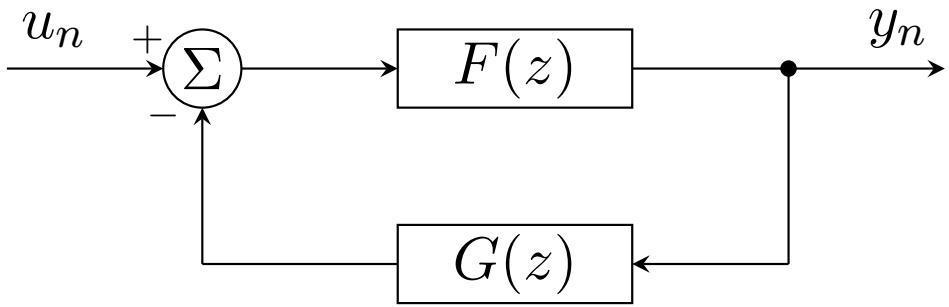
- Póly funkce $H(z)$ jsou podmnožinou spektra matice $\mathbf{A}$.
- Řekneme, že systém je **stabilní**, jestliže existuje $M > 0$ tak, že pro $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ a pro každý omezený vstup $(u_n)_{n=0}^{+\infty}$ je

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} |y_n| \leq M \sup_{n\in\mathbb{N}_0} |u_n| .$$

- Systém je stabilní právě tehdy, když všechny póly přenosové funkce leží uvnitř jednotkové kružnice.

Aplikace – teorie řízení

- Systém s přenosovou funkcí $F(z) = \frac{1}{z-1}$ není stabilní. Lze z něj připojením vhodného systému s přenosovou funkcí $G(z)$ vytvořit systém stabilní?
- Uvažme systém daný obrázkem:



Jeho přenosová funkce je

$$H(z) = \frac{F(z)}{1 + F(z)G(z)}.$$

- Jestliže $G(z) = \frac{\alpha}{z+1}$, pak systém s přenosovou funkcí

$$H(z) = \frac{F(z)}{1 + F(z)G(z)} = \frac{z+1}{z^2 - 1 + \alpha}$$

je stabilní právě tehdy, když $|1 - \alpha| < 1$.