Komplexní analýza

Laplaceova transformace

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
martin.bohata@fel.cvut.cz

Motivace a definice

- Chceme analogii Z-transformace pro funkce $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$.
- Aplikace: řešení diferenciálních rovnic, teorie řízení,...

Definice (Laplaceova transformace)

Laplaceovou transformací funkce $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ rozumíme komplexní funkci $\mathscr{L}[f] = F$ definovanou předpisem

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-ts}\,\mathrm{d}t,$$

jestliže $t \mapsto f(t)e^{-ts}$ je (lebesgueovsky) integrovatelná funkce na $[0, +\infty)$ pro alespoň jedno $s \in \mathbb{C}$.

- Jestliže $t \mapsto f(t)e^{-ts}$ je (lebesgueovsky) integrovatelná funkce na $[0, +\infty)$ pro nějaké $s_0 \in \mathbb{C}$, pak je také integrovatelná pro všechny $s \in \mathbb{C}$ splňující $\operatorname{Re} s \geq \operatorname{Re} s_0$.

Jednoduchý příklad

Příklad

Je-li $a \in \mathbb{C}$, potom

$$\mathscr{L}\left[e^{at}\right](s) = \frac{1}{s-a},$$

kde $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$. Speciálně

$$\mathscr{L}\left[1\right](s) = \frac{1}{s},$$

kde $\operatorname{Re} s > 0$.

Prostor L_0

Definice (po částech spojitá funkce)

Funkce $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se nazve **po částech spojitá na intervalu** $I \subseteq \mathbb{R}$, jestliže pro každé $a, b \in I$ splňující $a < b$ existuje konečně mnoho bodů $t_0, \ldots, t_n \in [a, b]$ tak, že

1. $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$;
2. pro každé $k \in \{1, \ldots, n\}$ je f spojitá na (t_{k-1}, t_k);
3. $f(t_k+) = \lim_{t \to t_k+} f(t)$ je konečná pro každé $k \in \{0, \ldots, n-1\}$;
4. $f(t_k-) = \lim_{t \to t_k-} f(t)$ je konečná pro každé $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Prostor L_0

Definice (prostor L_0)

Řekneme, že funkce $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ je **exponenciálního řádu**, jestliže existuje $\alpha \in \mathbb{R}$ a $M > 0$ tak, že $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ pro každé $t \in [0, \infty)$. Symbolem L_0 označíme množinu všech po částech spojitých funkcí $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$, které jsou exponenciálního řádu.

- Množina L_0 je uzavřená na lineární kombinace a (konečné) součiny (tj. je-li $f, g \in L_0$ a $\alpha \in \mathbb{C}$, pak $f + g, \alpha f, fg \in L_0$).
- Každá funkce z L_0 má Laplaceovu transformaci.

Příklad

1. 1, t, $\sin t$ a $\cos t$ jsou v L_0.
2. Každý polynom je v L_0.
3. $e^{at} \in L_0$ pro každé $a \in \mathbb{C}$.
4. $e^{t^2} \notin L_0$.

Heavisideova funkce

Definice (Heavisideova funkce)

Funkce

$$\mathbf{1}(t) := \chi_{[0,+\infty)}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

se nazývá **Heavisideova funkce**.

- Úmluva: V dalším nebudeme rozlišovat mezi funkcí $f \in L_0$ a funkcí, která vznikne z f dodefinováním nulou na intervalu $(-\infty, 0)$.
- Je-li $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ taková, že $f\restriction_{[0,\infty)} \in L_0$, pak podle naší úmluvy nerozlišujeme mezi $f\restriction_{[0,\infty)}$ a $f \cdot \mathbf{1}$.
- Je-li $0 \leq a < b < +\infty$, pak

$$\chi_{[a,b)}(t) = \mathbf{1}(t-a) - \mathbf{1}(t-b).$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Tvrzení

Nechť $f, g \in L_0$ *a* $a \in \mathbb{C}$.

1. $\mathscr{L}\left[f(t) + ag(t)\right](s) = \mathscr{L}\left[f(t)\right](s) + a\mathscr{L}\left[g(t)\right](s)$.
2. *Jestliže je* a *kladné reálné číslo, pak* $\mathscr{L}\left[f(at)\right](s) = \frac{1}{a}\mathscr{L}\left[f(t)\right]\left(\frac{s}{a}\right)$.
3. $\mathscr{L}\left[e^{at}f(t)\right](s) = \mathscr{L}\left[f(t)\right](s-a)$.
4. *Jestliže je* a *kladné reálné číslo, pak* $\mathscr{L}\left[f(t)\mathbf{1}(t-a)\right](s) = e^{-as}\mathscr{L}\left[f(t+a)\right](s)$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

- Bod 4 lze (s využitím naší úmluvy) přepsat do tvaru

$$\mathscr{L}\left[f(t-a)\mathbf{1}(t-a)\right](s) = e^{-as}\mathscr{L}\left[f(t)\right](s).$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad

1. Pro $\omega \in \mathbb{C}$ je

$$\mathscr{L}\left[\sin(\omega t)\right](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad \text{a} \quad \mathscr{L}\left[\cos(\omega t)\right](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

2. Pro $a \in \mathbb{C}$ je

$$\mathscr{L}\left[e^{at}\sin t\right](s) = \frac{1}{(s-a)^2+1}.$$

3. Pro $a > 0$ je

$$\mathscr{L}\left[\mathbf{1}(t-a)\right](s) = \frac{e^{-as}}{s}.$$

4.

$$\mathscr{L}\left[\mathbf{1}(t-2)e^{t}\right](s) = \frac{e^{-2(s-1)}}{s-1}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta (O derivaci obrazu)

Jestliže $f \in L_0$, $F(s) = \mathscr{L}[f](s)$,

$$\alpha_f = \inf\left\{\alpha \in \mathbb{R} \,\middle|\, f(t)e^{-\alpha t} \text{ je omezená na } [0, +\infty)\right\},$$
$$\Omega = \left\{s \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Re} s > \alpha_f\right\},$$

potom

1. F *je holomorfní na* Ω;
2. $$F'(s) = -\mathscr{L}[tf(t)](s) \qquad \text{pro každé } s \in \Omega.$$

Důkaz: Viz přednáška (jen náznak důkazu bodu 2). ■

Příklad

$$\mathscr{L}\left[te^t\right](s) = \frac{1}{(s-1)^2}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta (O obrazu derivace)

Ať $f \in L_0$ je spojitá na $[0, +\infty)$. Jestliže f' je funkce z L_0, která se rovná derivaci funkce f skoro všude na $[0, +\infty)$, pak

$$\mathscr{L}\left[f'(t)\right](s) = s\mathscr{L}\left[f(t)\right](s) - f(0).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

- Ať $n \in \mathbb{N}$ a $f, f', \ldots, f^{(n-1)} \in L_0$ jsou spojité na $[0, +\infty)$. Jestliže $f^{(n)}$ je funkce z L_0, která se rovná derivaci funkce $f^{(n-1)}$ skoro všude na $[0, +\infty)$, pak

$$\mathscr{L}\left[f^{(n)}(t)\right](s) = s^n\mathscr{L}\left[f(t)\right](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0).$$

Příklad

$$\mathscr{L}\left[t^n\right](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta (O obrazu periodické funkce)

Jestliže $f \in L_0$ je periodická funkce (na intervalu $[0, \infty)$) s periodou $T > 0$ (tj. $f(t+T) = f(t)$ pro každé $t \in [0, \infty)$), pak

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right](s) = \frac{\int_0^T f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t}{1 - e^{-sT}}.$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

Příklad

Ať

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}}[2k-2, 2k-1), \\ 0, & t \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}}[2k-1, 2k). \end{cases}$$

Potom

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right](s) = \frac{1 - e^{-s}}{s\left(1 - e^{-2s}\right)}.$$

Konvoluce

Definice (konvoluce)

Nechť $f, g \in L_0$. Funkce $h = f * g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$h(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) \, \mathrm{d}\tau$$

se nazve **konvoluce** funkcí f a g.

Jestliže $f, g, h \in L_0$, pak

- $f * g \in L_0$;
- $f * g = g * f$;
- $f * (g * h) = (f * g) * h$.

Příklad

$$t * 1 = \frac{t^2}{2}.$$

Konvoluce

Věta (O obrazu konvoluce)

Jestliže $f, g \in L_0$, *potom*

$$\mathscr{L}\left[(f * g)(t)\right](s) = \mathscr{L}\left[f(t)\right](s)\,\mathscr{L}\left[g(t)\right](s).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

1. $\mathscr{L}\left[1 * 1\right](s) = \frac{1}{s^2}$.
2. $\mathscr{L}\left[t * e^t\right](s) = \frac{1}{s^2(s-1)}$.

- Neexistuje žádná funkce $\delta \in L_0$ tak, aby $\mathscr{L}\left[\delta(t)\right](s) = 1$.

Pohádka o Diracovi

Ať $a \in \mathbb{R}$. Diracova funkce $\delta_a(t)$ by měla být funkce splňující

$$f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

pro každou spojitou funkci f na $\mathbb{R}$. Speciálně tedy

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t)\,\mathrm{d}t$$

- Místo $\delta_0(t)$ se píše jen $\delta(t)$. Často se také místo $\delta_a(t)$ píše $\delta(t-a)$.
- Diracova funkce $\delta_a(t)$ ale nemůže být obyčejná funkce. Naivní pohled

$$\delta_a(t) = \begin{cases} 0, & t \neq a, \\ +\infty, & t = a, \end{cases}$$

  vede ke sporu s požadavkem $1 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t)\,\mathrm{d}t$.
- Diracova funkce je ale objekt, který lze v jistém smyslu aproximovat pomocí vhodné posloupnosti funkcí.

Pohádka o Diracovi

Ať $\varphi_n(t) = n\chi_{[a,a+\frac{1}{n}]}(t)$.

- Pro každou spojitou funkci f na $\mathbb{R}$ máme

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = f(a).$$

- Uvedená aproximace Diracovy funkce pomocí posloupnosti funkcí φ_n není jediná možná.
- Je-li $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$ a f je vhodná (ne nutně spojitá) funkce, pak

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\delta_a(t)\,\mathrm{d}t := \lim_{n\to+\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t$$

- Ať $a \geq 0$ a $f \in L_0$. Pak

$$(\delta_a * f)(t) = f(t-a);$$
$$\mathscr{L}\left[\delta_a(t)\right](s) = e^{-as}.$$

Speciálně $\delta * f = f$ a $\mathscr{L}\left[\delta(t)\right](s) = 1$.

Inverzní Laplaceova transformace

- Nechť komplexní funkce $F(s)$ je Laplaceova transformace nějaké funkce z L_0. Jak najít její vzor?
- Pro nalezení vzoru potřebujeme najít řešení integrální rovnice

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t.$$

- Vzor není určen jednoznačně (funkce z L_0 lišící se na množině míry 0 mají stejnou Laplaceovu transformaci).

Věta (Lerchova věta)

Jestliže $f, g \in L_0$ jsou spojité zprava v každém bodě intervalu $[0, \infty)$ a mají stejnou Laplaceovu transformaci, pak $f = g$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Inverzní Laplaceova transformace

Věta (O inverzi)

Nechť $f \in L_0$ *(dodefinovaná nulou na* $(-\infty, 0)$*),*

$$\alpha_f = \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R} \,\middle|\, f(t)e^{-\alpha t} \text{ je omezená na } [0, +\infty) \right\}$$

a f' *je po částech spojitá na* $[0, \infty)$*. Jestliže* $F(s) = \mathscr{L}[f(t)](s)$*, potom*

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s)e^{ts}\,\mathrm{d}s := \frac{1}{2\pi i} \lim_{b\to+\infty} \int_{L(a,b)} F(s)e^{ts}\,\mathrm{d}s,$$

kde $a > \alpha_f$ *a* $L(a, b)$ *je úsečka s parametrizací* $\varphi(\tau) = a + i\tau$*,* $\tau \in [-b, b]$*.*

Důkaz: Vynecháváme. ■

- $\frac{f(t+)+f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s)e^{ts}\,\mathrm{d}s$ se nazývá **Riemannův-Mellinův vzorec** a přímka $\operatorname{Re} s = a$ se nazývá **Bromwichova linie**.

Inverzní Laplaceova transformace – metoda reziduí

Hledání Laplaceova vzoru $f(t)$ funkce $F(s)$ pomocí tzv. **metody reziduí**.
Předpokládejme, že:

1. F se dá rozšířit na funkci holomorfní na $\mathbb{C} \setminus M$, kde M je spočetná množina obsahující pouze izolované singularity rozšíření funkce F.
2. Existuje posloupnost polokružnic

$$K_n = \{s \in \mathbb{C} \,|\, |s-a| = R_n, \operatorname{Re} s \leq a\}$$

s poloměry R_n tak, že $R_n \to +\infty$ pro $n \to +\infty$ a pro každé $t > 0$ je

$$\int_{K_n} F(s)e^{st}\,\mathrm{d}s \to 0 \quad \text{pro } n \to +\infty.$$

Potom pro každé $t > 0$ je

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s)e^{ts}\,\mathrm{d}s = \lim_{n\to+\infty}\sum_{w\in M_n} \operatorname{res}_w F(s)e^{st},$$

kde $M_n = \{s \in M \,|\, |s-a| < R_n\}$.

Inverzní Laplaceova transformace – metoda reziduí

Ať P, Q jsou polynomy splňující $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$. Metodu reziduí lze použít například, je-li

- $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$;
- $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \frac{1}{1 \pm e^{-Ts}}$, kde $T > 0$;

Příklad

1. Laplaceův vzor k $F(s) = \frac{1}{s(s-1)}$ je

$$f(t) = e^t - 1.$$

2. Laplaceův vzor k $F(s) = \frac{2s+3}{s^2+1}$ je

$$f(t) = 2\cos t + 3\sin t.$$

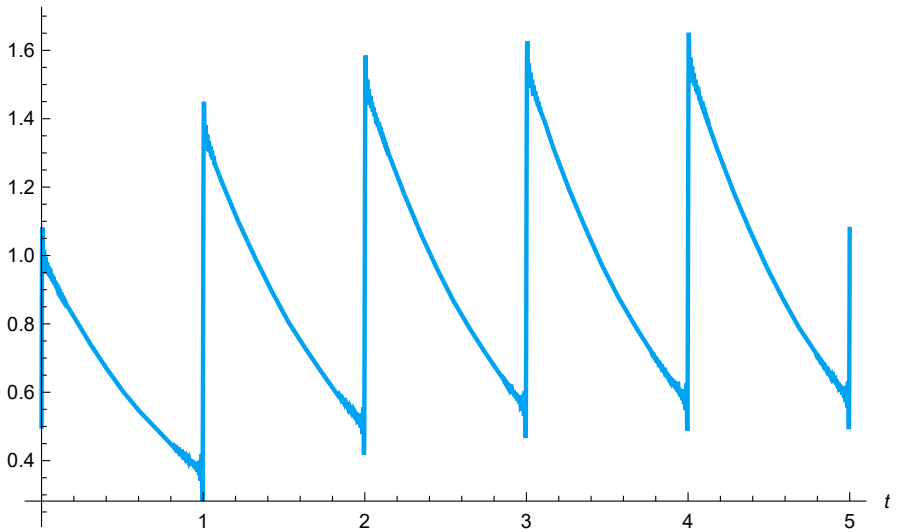
Inverzní Laplaceova transformace – metoda reziduí

Příklad

Ať $F(s) = \frac{1}{(s+1)(1-e^{-s})}$. Vzor k této funkci je

$$f(t) = \frac{1}{1-e} e^{-t} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n t}}{2\pi i n + 1}.$$

Aproximace f tvaru $\frac{1}{1-e} e^{-t} + \sum_{n=-100}^{100} \frac{e^{2\pi i n t}}{2\pi i n + 1}$ má graf:



Inverzní Laplaceova transformace – metoda reziduí

- Avšak vzorec se součtem reziduí nelze použít vždy!
- Hledáme-li vzor f k $F(s) = G(s)e^{-as}$, nalezneme nejdříve vzor g k funkci G a poté využijeme toho, že $f(t) = g(t-a)\mathbf{1}(t-a)$.

Příklad

1. Pro $F(s) = \frac{e^{-s}}{s}$ je vzor $f(t) = \mathbf{1}(t-1)$, ale formální využití vzorce s rezidui by dalo funkci $t \mapsto 1$.
2. $F(s) = \frac{e^{-s}}{(s+1)(1-e^{-s})}$ má vzor

$$f(t) = \left[\frac{1}{1-e} e^{-(t-1)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n(t-1)}}{2\pi i n + 1} \right] \mathbf{1}(t-1).$$

Aplikace – řešení rovnic

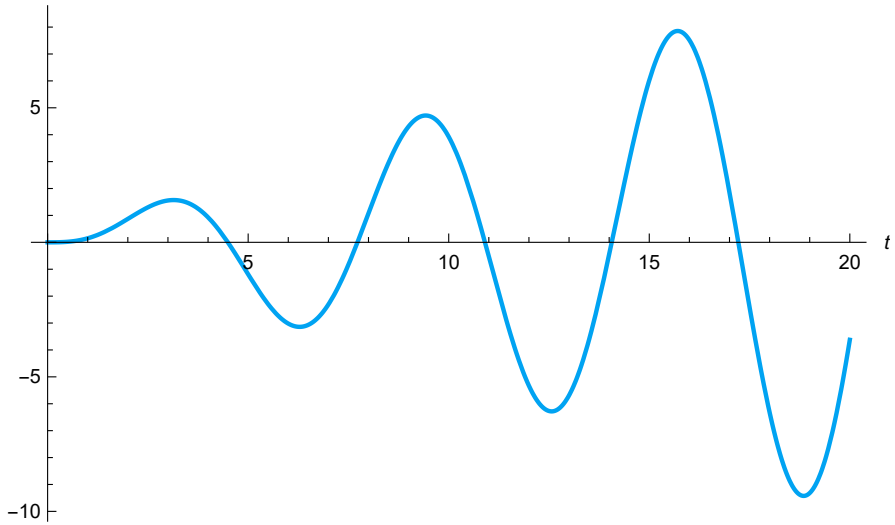
Příklad

Řešení rovnice

$$y''(t) + y(t) = \sin t$$

na intervalu $[0, +\infty)$, které splňuje počáteční podmínky $y(0) = y'(0) = 0$, je

$$y(t) = \frac{1}{2}\sin t - \frac{t}{2}\cos t, \quad t \geq 0.$$



Aplikace – řešení rovnic

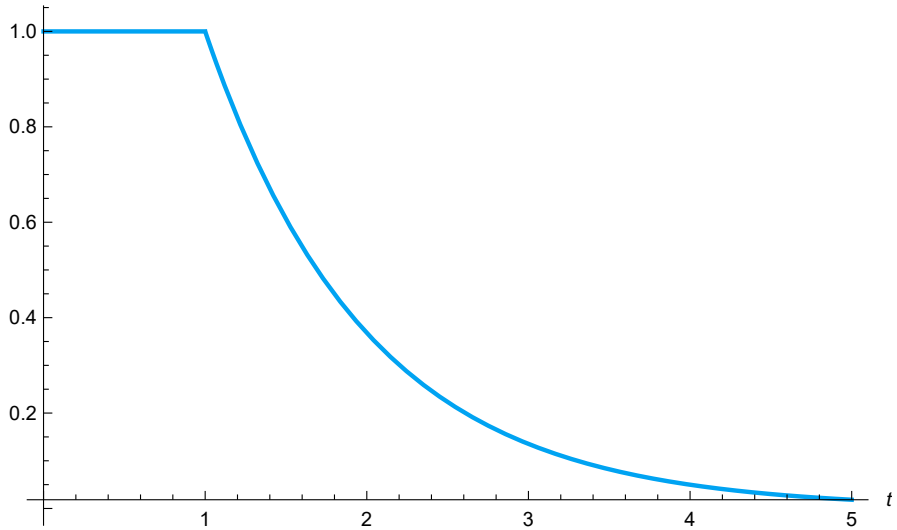
Příklad

Řešení rovnice

$$y'(t) + y(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-1)$$

na intervalu $[0, +\infty)$, které splňuje počáteční podmínku $y(0) = 1$, je

$$y(t) = 1 - \left(1 - e^{1-t}\right) \mathbf{1}(t-1), \quad t \geq 0.$$



Aplikace – řešení rovnic

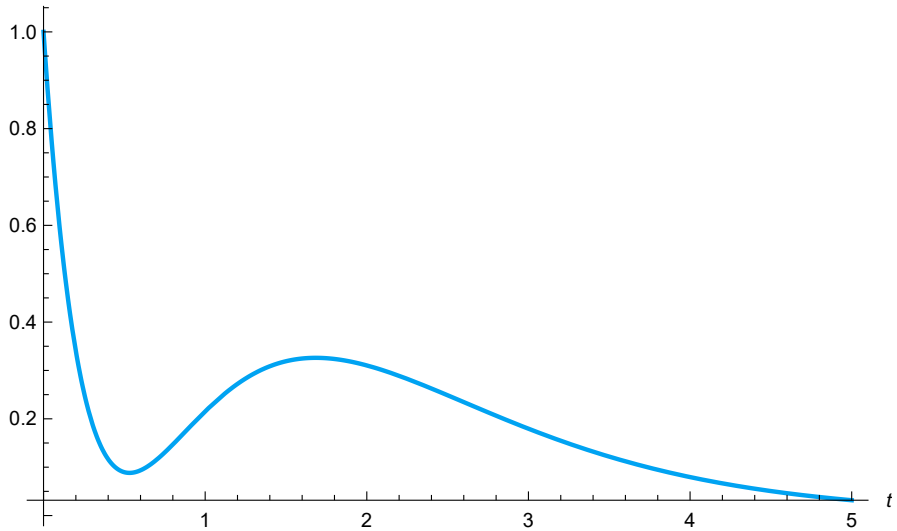
Příklad

Řešení rovnice

$$y(t) = e^{-t} - 4\int_0^t \cos(2\tau) y(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

na intervalu $[0, +\infty)$ je

$$y(t) = 5e^{-t} - 4e^{-2t} - 8te^{-2t}, \quad t \geq 0.$$



Aplikace – řešení rovnic

Příklad

Řešení rovnice

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

na $[0, +\infty) \times [0, \pi]$ splňující podmínky

1. $y(t, 0) = y(t, \pi) = 0$ pro každé $t \geq 0$,
2. $y(0, x) = \sin x$ pro každé $x \in [0, \pi]$,
3. $\frac{\partial y}{\partial t}(0, x) = 0$ pro každé $x \in [0, \pi]$

je

$$y(t, x) = \cos t \sin x, \quad (t, x) \in [0, +\infty) \times [0, \pi].$$

Aplikace – teorie řízení

Uvažme systém popsaný soustavou

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t),$$
$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t),$$

kde $\mathbf{A} \in \mathbb{M}_k(\mathbb{C})$, $\mathbf{B} \in \mathbb{M}_{k,1}(\mathbb{C})$ a $\mathbf{C} \in \mathbb{M}_{1,k}(\mathbb{C})$ jsou matice a u je vhodná funkce.

Terminologie:

- u ... **vstup**.
- $\mathbf{x}$ ... **stav**.
- y ... **výstup**.
- **Impulzní odezva** je výstup h systému odpovídající vstupu $u = \delta$, kde δ je Diracova funkce, a počáteční podmínce $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$.
- $H(s) = \mathscr{L}[h(t)](s)$ ... **přenosová funkce**.

Dále nebudeme rozlišovat mezi přenosovou funkcí a jejím holomorfním rozšířením na co největší oblast v $\mathbb{C}$.

Aplikace – teorie řízení

- Je-li dán vstup u a počáteční podmínky $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, pak Laplaceova transformace výstupu je

$$Y(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s).$$

  kde $U(s) = \mathscr{L}\left[u(t)\right](s)$.
- Přenosová funkce je proto racionální funkce tvaru

$$H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}.$$

- Póly funkce $H(s)$ jsou podmnožinou spektra matice $\mathbf{A}$.
- Řekneme, že systém je **stabilní**, jestliže existuje $M > 0$ tak, že pro $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ a pro každý omezený vstup $u \in L_0$ je

$$\sup_{t\in[0,+\infty)} |y(t)| \leq M \sup_{t\in[0,+\infty)} |u(t)|.$$

- Systém je stabilní právě tehdy, když všechny póly přenosové funkce leží v polorovině $\operatorname{Re} s < 0$.

Aplikace – teorie řízení

- Uvažme lineární lomené zobrazení (nazývá se **Tustinova transformace**):

$$f(z) = \frac{2(z-1)}{T(z+1)},$$

kde $T > 0$.

- Ať $K = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$. Pak

$$f(K) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re} z = 0\} \cup \{\infty\},$$
$$f(U(0;1)) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re} z < 0\}.$$

- Funkce

$$G(z) = H(f(z))$$

je přenosová funkce nějakého diskrétního systému.

- Platí, že diskrétní systém s přenosovou funkcí $G(z)$ je stabilní právě tehdy, když systém s přenosovou funkcí $H(s)$ je stabilní.