

Elementární funkce

Zadání

1. Nalezněte inverzní zobrazení k Möbiově transformaci $f(z) = \frac{2z+1}{z-1}$.

2. Je dána Möbiova transformace

$$f(z) = \frac{z+i}{z-i}.$$

Nalezněte $f(M)$, jestliže

- (a) $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$;
- (b) $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+i| \leq 1\}$.

3. Je dána Möbiova transformace

$$f(z) = \frac{2z-3}{z-2}.$$

Nalezněte $f(M)$, jestliže $M = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} z < 2\}$.

4. Je dána Möbiova transformace

$$f(z) = \frac{z+1}{z-\alpha},$$

kde $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ je parametr. Určete všechny možné hodnoty parametru α tak, aby f zobrazilo kružnici $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ na nějakou kružnici se středem $S = 2$. Pro tyto hodnoty určete také poloměr kružnice $f(K)$.

5. Je dána Möbiova transformace

$$f(z) = \frac{\alpha z + 1}{z + 1},$$

kde $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

- (a) Stanovte inverzní zobrazení k zobrazení f .
 - (b) Určete α tak, aby existovala kružnice K se středem v bodě -1 taková, že $f(K) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$. Dále určete poloměr kružnice K .
6. Ukažte, že $e^{\bar{z}}$ není diferencovatelná v žádném bodě $z \in \mathbb{C}$.
7. Existuje $\lim_{z \rightarrow \infty} e^z$? Pokud ano, spočtěte ji.
8. Nalezněte algebraický tvar komplexní čísla z , jestliže
- (a) $z = \sin(\frac{\pi}{2} + i \ln 2)$;
 - (b) $z = \cos(2 - 4i)$;
 - (c) $z = \ln(1 - i)$;
 - (d) $z = \ln(-1 - \sqrt{3}i)$.

9. V oboru komplexních čísel řešte

- (a) $e^z = 1 + i$;
- (b) $e^{2z-1} = 1$;
- (c) $e^{e^z} = 1$;
- (d) $\ln(z^2 - 1) = i\frac{\pi}{2}$;
- (e) $e^{2z} + e^z + 1 = 0$;
- (f) $\sin z = i$;
- (g) $\cos z = 4$;
- (h) $\sin z = \cos z$.

10. Nalezněte

- (a) $M_{\frac{1}{2}}(i)$ a $m_{\frac{1}{2}}(i)$;
- (b) $M_i(i)$ a $m_i(i)$;
- (c) $M_{-i}(1)$ a $m_{-i}(1)$.

11. Ať $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $a \in \mathbb{C}$.

- (a) Nalezněte $|m_a(z)|$.
- (b) Určete, pro jaká a je $|m_a(z)| = m_a(|z|)$.

12. Je dána rovnice

$$\operatorname{tg} z = a,$$

kde $a \in \mathbb{C}$.

- (a) Ukažte, že pro $a = \pm i$ nemá zadaná rovnice žádné řešení a pro $a \neq \pm i$ je

$$\frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1+ia}{1-ia} = \left\{ \frac{1}{2i} \ln \frac{1+ia}{1-ia} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

množina všech jejích řešení.

- (b) Ukažte, že komplexní funkce

$$\operatorname{arctg} z := \frac{1}{2i} \ln \frac{1+iz}{1-iz}$$

je diferencovatelná na $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{it \mid t \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$ a pro každé $z \in \Omega$ je

$$(\operatorname{arctg} z)' = \frac{1}{1+z^2}.$$

Výsledky

1. $f^{-1}(z) = \frac{z+1}{z-2}$.
2. (a) $f(M) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 0\} \cup \{\infty\}$.
(b) $f(M) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + \frac{1}{3}| \leq \frac{2}{3}\}$.
3. $f(M) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \frac{7}{4}| > \frac{1}{4}, \operatorname{Re} z < 2\}$.
4. $\alpha = \frac{1}{2}$, poloměr je 2.
5. (a) $f^{-1}(z) = \frac{1-z}{z-\alpha}$.
(b) $\alpha = 0$, poloměr kružnice K je $\frac{1}{2}$.
7. Neexistuje.
8. (a) $\sin(\frac{\pi}{2} + i \ln 2) = \frac{5}{4}$;
(b) $\cos(2 - 4i) = \cosh(4) \cos 2 + i \sinh 4 \sin 2$;
(c) $\ln(1 - i) = \ln \sqrt{2} - i \frac{\pi}{4}$;
(d) $\ln(-1 - \sqrt{3}i) = \ln 2 - \frac{2\pi i}{3}$.
9. (a) $z = \ln \sqrt{2} + i \frac{\pi}{4} + 2k\pi i$, kde $k \in \mathbb{Z}$;
(b) $z = \frac{1}{2} + k\pi i$, kde $k \in \mathbb{Z}$;
(c) $z = \ln |2k\pi| + i \frac{\pi k}{2|k|} + 2l\pi i$, kde $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ a $l \in \mathbb{Z}$;
(d) $z = \pm \sqrt[4]{2} e^{i \frac{\pi}{8}}$;
(e) $z = \pm \frac{2\pi i}{3} + 2k\pi i$, kde $k \in \mathbb{Z}$;
(f) $z \in \{2k\pi - i \ln(\sqrt{2} - 1) \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(2k+1)\pi - i \ln(\sqrt{2} + 1) \mid k \in \mathbb{Z}\}$;
(g) $z = -i \ln(4 \pm \sqrt{15}) + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$;
(h) $z = \frac{\pi}{4} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
10. (a) $M_{\frac{1}{2}}(i) = \{e^{i \frac{\pi}{4}}, -e^{i \frac{\pi}{4}}\}$ a $m_{\frac{1}{2}}(i) = e^{i \frac{\pi}{4}}$;
(b) $M_i(i) = \{e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ a $m_i(i) = e^{-\frac{\pi}{2}}$;
(c) $M_{-i}(1) = \{e^{2k\pi} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ a $m_{-i}(1) = 1$.
11. (a) $|m_a(z)| = e^{(\operatorname{Re} a) \ln |z| - (\operatorname{Im} a) \arg(z)}$.
(b) Pro $a \in \mathbb{R}$.