

Laplaceova transformace

Zadání

1. Nalezněte Laplaceovu transformaci funkce

- (a) $f(t) = t \sin t$;
- (b) $f(t) = (1 + e^t)^2$;
- (c) $f(t) = t^2 + e^t \cos(2t)$;
- (d) $f(t) = \sin t \cos(3t)$.

2. Je dána funkce

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi}t + 1 & t \in [0, \frac{\pi}{2}), \\ \cos t & t \in [\frac{\pi}{2}, \pi), \\ -1 & t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

- (a) Pomocí Heavisideovy funkce $\mathbf{1}(t)$ zapište předpis pro funkci f .
 - (b) Nalezněte Laplaceovu transformaci funkce f .
3. Určete Laplaceovu transformaci periodické funkce s periodou $T > 0$, která je zadána předpisem $f(t) = \mathbf{1}(t - \frac{T}{2})$ pro $t \in [0, T)$.
4. Nalezněte Laplaceovu transformaci funkce $f(t) = |\sin(t)|$.
5. Je dána funkce

$$f(t) = \begin{cases} e^{-2t} \sin t, & t \in [0, \pi); \\ 0, & t \geq \pi. \end{cases}$$

- (a) Zapište $f(t)$ pomocí Heavisideovy funkce.
 - (b) Nalezněte Laplaceovu transformaci $F(s)$ funkce $f(t)$.
 - (c) Nalezněte Laplaceovu transformaci $G(s)$ periodické funkce $g(t)$ s periodou $T = 2\pi$ danou na $[0, 2\pi]$ předpisem $g(t) = f(t)$.
6. Nalezněte Laplaceovu transformaci funkce $f(t) = e^t * [\sin(2t)\mathbf{1}(t - \frac{\pi}{4})]$.
7. Vyjádřete Laplaceův vzor k funkci $F(s) = \frac{1}{s(s-2)}$ jako konvoluci dvou funkcí a tuto konvoluci spočtěte.
8. Stanovte Laplaceův vzor $f(t)$ funkce
- (a) $F(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)}$;
 - (b) $F(s) = \frac{e^{-s}}{s^2-1}$;
 - (c) $F(s) = \frac{e^{-2s}}{s(s+1)^2} + \frac{1-3s}{s^4}$.
9. Metodou reziduí nalezněte Laplaceův vzor $f(t)$ funkce $F(s) = \frac{1}{s(1-e^{-2s})}$ ve tvaru nekonečné řady.

10. Metodou reziduí nalezněte Laplaceův vzor $f(t)$ funkce $F(s) = \frac{1}{(s+1)^2(1-e^{-2s})}$ ve tvaru nekonečné řady.

11. Pomocí Laplaceovy transformace řešte diferenciální rovnici

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = e^{-2t}$$

s počátečními podmínkami $y(0) = 1$ a $y'(0) = -2$.

12. Pomocí Laplaceovy transformace řešte soustavu diferenciálních rovnic

$$x'(t) = 1 - 3x + 5y$$

$$y'(t) = 3y - 5x$$

s počátečními podmínkami $x(0) = y(0) = 0$.

13. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení integrodiferenciální rovnice

$$y'(t) = t + \int_0^t y(\tau) \cos(t - \tau) d\tau$$

vyhovující počáteční podmínce $y(0) = 4$.

14. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení integrální rovnice

$$y(t) = 3t^2 + \frac{1}{6} \int_0^t \tau^3 y(t - \tau) d\tau.$$

15. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení diferenciální rovnice

$$y''(t) + y(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - 1)$$

vyhovující počátečním podmínkám $y(0) = 1$ a $y'(0) = 0$.

16. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení diferenciální rovnice

$$y''(t) + y(t) = [\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - \pi)] \cos t$$

vyhovující počátečním podmínkám $y(0) = y'(0) = 0$.

17. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení integrodiferenciální rovnice

$$y'(t) - 2 \int_0^t y(\tau) \cos(t - \tau) d\tau = \mathbf{1}(t - 1)$$

vyhovující počáteční podmínce $y(0) = 0$.

Výsledky

1. Nalezňte Laplaceovu transformaci funkce

(a) $F(s) = \frac{2s}{(s^2+1)^2};$

(b) $F(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s-2};$

(c) $F(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{s-1}{(s-1)^2+4};$

(d) $\frac{1}{2i} \left[\frac{s-i}{(s-i)^2+9} - \frac{s+i}{(s+i)^2+9} \right].$

2. (a) $f(t) = \left(1 - \frac{2}{\pi}t\right) [\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2})] + [\mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2}) - \mathbf{1}(t - \pi)] \cos t - \mathbf{1}(t - \pi).$

(b) $\mathcal{L}[f(t)](s) = -\frac{2}{\pi s^2} + \frac{1}{s} + \frac{2e^{-\frac{\pi}{2}s}}{\pi s^2} - \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1} + \frac{se^{-\pi s}}{s^2+1} - \frac{e^{-\pi s}}{s}.$

3. $\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1-e^{\frac{T}{2}s}}{s(1-e^{Ts})}.$

4. $\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1+e^{-\pi s}}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}.$

5. (a) $f(t) = (e^{-2t} \sin t) [\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - \pi)].$

(b) $F(s) = \frac{1+e^{-\pi(s+2)}}{(s+2)^2+1}.$

(c) $G(s) = \frac{1+e^{-\pi(s+2)}}{[(s+2)^2+1](1-e^{-2\pi s})}.$

6. $F(s) = \frac{e^{-\frac{\pi}{4}s}s}{(s-1)(s^2+4)}.$

7. $f(t) = 1 * e^{2t} = \frac{e^{2t}-1}{2}.$

8. (a) $f(t) = \frac{1}{2}e^t - e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t};$

(b) $f(t) = \left(\frac{e^{t-1}}{2} - \frac{e^{-(t-1)}}{2}\right) \mathbf{1}(t-1);$

(c) $f(t) = \frac{1}{6}t^3 - \frac{3}{2}t^2 - (t-1)e^{-(t-2)}\mathbf{1}(t-2).$

9. $f(t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{2} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{e^{i\pi n t}}{2i\pi n}.$

10. $f(t) = \frac{1}{1-e^2}te^{-t} + \frac{2e^2}{(1-e^2)^2}e^{-t} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi n t}}{2(1+i\pi n)^2}.$

11. $y(t) = e^{-t} - e^{-2t} + e^{-3t}$ pro $t \geq 0$.

12. $x(t) = -\frac{3}{16} + \frac{3}{16} \cos(4t) + \sin(4t), y(t) = -\frac{5}{16} + \frac{5}{16} \cos(4t)$ pro $t \geq 0$.

13. $y(t) = 4 + \frac{5t^2}{2} + \frac{t^4}{24}$ pro $t \geq 0$.

14. $y(t) = 3 \cosh t - 3 \cos t.$

15. $y(t) = 1 - [1 - \cos(t-1)]\mathbf{1}(t-1)$ pro $t \geq 0$.

16. $y(t) = \frac{t}{2} [\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - \pi)] \sin t - \frac{\pi}{2} \mathbf{1}(t - \pi) \sin t$ pro $t \geq 0$.

17. $y(t) = (1 - t + e^{t-1} - e^{1-t}) \mathbf{1}(t-1)$ pro $t \geq 0$.