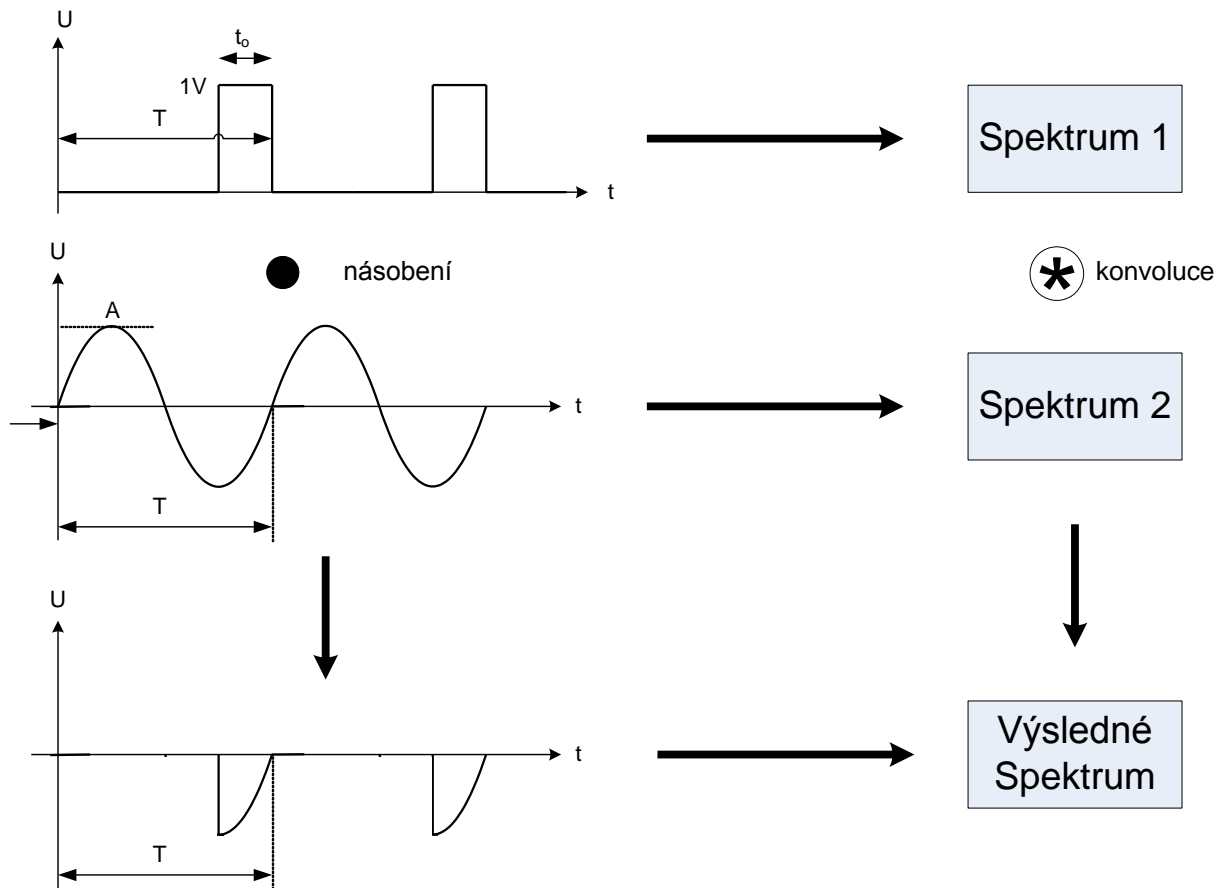


V tomto dokumentu bude odvozeno spektrum vyseknutého sinusového signálu pomocí konvoluce ve frekvenční oblasti. V časové oblasti je možno tento vyseknutý signál vytvořit násobením obdélníkového (0 – 1V) a sinusového signálu dle obr.1. Operaci násobení odpovídá ve frekvenční oblasti konvoluce mezi spektry obdélníkového a harmonického signálu.



Obr.1

Konvoluce je definována matematicky dle předpisu:

$$X_1(k) * X_2(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} X_1(i)X_2(k-i) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} X_1(k-i)X_2(i) \quad (1)$$

kde $X_1(k)$ a $X_2(k)$ jsou spektra obou signálů.

Spektrum obdélníkového periodického signálu

Spektrum obdélníkového periodického signálu dle obr.1 lze vyjádřit rozvojem ve Fourierovu řadu. Následuje výpočet koeficientů řady.

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega_0 t) dt = \frac{2}{T} \int_{T-t_0}^T 1 \cos(k\omega_0 t) dt = \dots = -\frac{1}{k\pi} \sin\left[2k\pi\left(1 - \frac{t_0}{T}\right)\right] \\
 b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega_0 t) dt = \frac{2}{T} \int_{T-t_0}^T 1 \sin(k\omega_0 t) dt = \dots = -\frac{1}{k\pi} \left\{1 - \cos\left[2k\pi\left(1 - \frac{t_0}{T}\right)\right]\right\} \\
 B_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{T-t_0}^T 1 dt = \dots = \frac{t_0}{T}
 \end{aligned} \tag{2}$$

Fázory harmonických pro goniometrický tvar Fourierovy řady lze vyjádřit následovně:

$$\begin{aligned}
 \widehat{B}_k &= b_k + ja_k = |B_k| e^{j\varphi_k} \\
 |B_k| &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\
 \varphi_k &= \operatorname{arctg} \frac{a_k}{b_k}
 \end{aligned} \tag{3}$$

dosazením z (2) dostaneme:

$$\begin{aligned}
 |B_k| &= \frac{2}{k\pi} \left| \sin\left[k\pi\left(1 - \frac{t_0}{T}\right)\right] \right| \\
 \varphi_k &= \operatorname{arctg} \frac{\sin \frac{3}{2} k\pi}{1 - \cos \frac{3}{2} k\pi}
 \end{aligned} \tag{4}$$

Pro potřeby konvoluce je třeba použít oboustranné spektrum tj. komplexní tvar Fourierovy řady, jehož fázory lze získat z fázorů goniometrického tvaru následovně:

$$\begin{aligned}
 |A_k| &= \frac{|B_k|}{2} = \frac{1}{k\pi} \left| \sin\left[k\pi\left(1 - \frac{t_0}{T}\right)\right] \right| \\
 \psi_k &= \varphi_k - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\sin \frac{3}{2} k\pi}{1 - \cos \frac{3}{2} k\pi}
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$A_0 = B_0 = \frac{t_0}{T}$$

$\widehat{A}_k = |A_k| e^{j\psi_k}$ je oboustranné spektrum. Amplituda je poloviční a spektrum symetrické dle svislé osy. Fázové spektrum je symetrické dle počátku souřadného systému.

Spektrum harmonického signálu

Spektrum harmonického signálu je jedna spektrální čára o velikosti A a v našem případě s nulovým fázovým posunem. Pro potřeby konvoluce je třeba opět přejít na oboustranné spektrum tj. obě spektrální čáry budou mít poloviční velikost oproti původní jedné a čára v kladných frekvencích bude mít fázový posun $-\pi/2$ a čára v záporných frekvencích $+\pi/2$.

Konvoluce mezi spektry

Frekvence obou signálů jsou shodné, tj. harmonická sinového signálu leží ve spektru na stejném místě jako první harmonická obdélníku je to též frekvenční krok se kterým budou mezi sebou spektra posouvat.

Příklad provedeme pro $t_0/T = 1/4$, tj. ze sinového signálu bude vyseknuto $3/4$ periody (ve cvičeních PI to odpovídá signálu *sinus315.wfm*). Amplitudu sinusovky zvolme 200mV. Dosazením do vztahů (5) dostáváme pro prvních pár harmonických obdélníku následující hodnoty:

k	Obdélník	Sinus
-5	$0.045e^{-0.785j}$	0
-4	0	0
-3	$0.075e^{0.785j}$	0
-2	$0.159e^{1.57j}$	0
-1	$0.225e^{-0.785j}$	$0.1e^{+j\frac{\pi}{2}}$
0	1/4	0
1	$0.225e^{0.785j}$	$0.1e^{-j\frac{\pi}{2}}$
2	$0.159e^{-1.57j}$	0
3	$0.075e^{-0.785j}$	0
4	0	0
5	$0.045e^{0.785j}$	0

Dle definice konvoluce (1) je třeba před konvolucí jedno ze spekter převrátit. Může tak učinit třeba pro sinový signál.

Výpočet nulté spektrální čáry $k = 0$ (stejnosečná složka) vyseknuté sinusovky:

k	Obdélník	Sinus (převrácen)
-5	$0.045e^{-0.785j}$	0
-4	0	0
-3	$0.075e^{0.785j}$	0
-2	$0.159e^{1.57j}$	0
-1	$0.225e^{-0.785j}$	$0.1e^{-j\frac{\pi}{2}}$
0	1/4	0
1	$0.225e^{0.785j}$	$0.1e^{+j\frac{\pi}{2}}$
2	$0.159e^{-1.57j}$	0
3	$0.075e^{-0.785j}$	0
4	0	0
5	$0.045e^{0.785j}$	0

$$\hat{U}_0 = 0,1e^{-j\frac{\pi}{2}}0,225e^{-0,785j} + 0,1e^{j\frac{\pi}{2}}0,225e^{0,785j} = -31,8 \text{ mV}$$

na multimetru naměřeno: $U_0 = -31,81 \text{ mV}$

Výpočet první harmonické $k = 1$ ve spektru vyseknuté sinusovky:

k	Obdélník	Sinus (převrácen) – posunut o jednu pozici do kladných frekvencí
-5	$0.045e^{-0.785j}$	0
-4	0	0
-3	$0.075e^{0.785j}$	0
-2	$0.159e^{1.57j}$	0
-1	$0.225e^{-0.785j}$	0
0	1/4	$0.1e^{-j\frac{\pi}{2}}$
1	$0.225e^{0.785j}$	0
2	$0.159e^{-1.57j}$	$0.1e^{+j\frac{\pi}{2}}$
3	$0.075e^{-0.785j}$	0
4	0	0
5	$0.045e^{0.785j}$	0

Fázor 1. harmonické, oboustranné spektrum:

$$\hat{U}_1 = 0,1e^{-j\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} + 0,1e^{j\frac{\pi}{2}} 0,159e^{-1,57j} = 0,0159 - 0,0250j \text{ V}$$

amplituda a fáze, oboustranné spektrum:

$$|\hat{U}_1| = |0,0159 - 0,0250j| = 29,6\text{mV}$$

$$\arg \hat{U}_1 = \arg(0,0159 - 0,0250j) = -1.0043 \text{ rad}$$

efektivní hodnota a fáze, jednostranné spektrum:

$$|\hat{U}_1| = \frac{2}{\sqrt{2}} 29,6 \text{ mV} = 41,86 \text{ mV}$$

na spektrálním analyzátoru naměřeno $U_{1\text{ef}} = 41,7 \text{ mV}$

$$\arg \hat{U}_1 = -1.0043 + \frac{\pi}{2} = 0.5665 \text{ rad}$$

Výpočet druhé harmonické $k = 2$ ve spektru vyseknuté sinusovky:

k	Obdélník	Sinus (převrácen) – posunut o dvě pozice do kladných frekvencí
-5	$0.045e^{-0.785j}$	0
-4	0	0
-3	$0.075e^{0.785j}$	0
-2	$0.159e^{1.57j}$	0
-1	$0.225e^{-0.785j}$	0
0	1/4	0
1	$0.225e^{0.785j}$	$0.1e^{-j\frac{\pi}{2}}$
2	$0.159e^{-1.57j}$	0
3	$0.075e^{-0.785j}$	$0.1e^{+j\frac{\pi}{2}}$
4	0	0
5	$0.045e^{0.785j}$	0

Fázor 2. harmonické, oboustranné spektrum:

$$\widehat{U}_2 = 0,1e^{-j\frac{\pi}{2}} 0,225e^{0,785j} + 0,1e^{j\frac{\pi}{2}} 0,075e^{-0,785j} = 0,0212 - 0,0106j \text{ V}$$

amplituda a fáze, oboustranné spektrum:

$$|\widehat{U}_2| = |0,0212 - 0,0106j| = 23,7 \text{ mV}$$

$$\arg \widehat{U}_2 = \arg(0,0212 - 0,0106j) = -0,4636 \text{ rad}$$

efektivní hodnota a fáze, jednostranné spektrum:

$$|\widehat{U}_2| = \frac{2}{\sqrt{2}} 23,7 \text{ mV} = 33,5 \text{ mV}$$

na spektrálním analyzátoru naměřeno $U_{2\text{ef}} = 33,2 \text{ mV}$

$$\arg \widehat{U}_2 = -0,4636 + \frac{\pi}{2} = 1.1071 \text{ rad}$$

Výpočet třetí harmonické $k = 3$ ve spektru vyseknuté sinusovky:

k	Obdélník	Sinus (převrácen) – posunut o tři pozice do kladných frekvencí
-5	$0.045e^{-0.785j}$	0
-4	0	0
-3	$0.075e^{0.785j}$	0
-2	$0.159e^{1.57j}$	0
-1	$0.225e^{-0.785j}$	0
0	1/4	0
1	$0.225e^{0.785j}$	0
2	$0.159e^{-1.57j}$	$0.1e^{-j\frac{\pi}{2}}$
3	$0.075e^{-0.785j}$	0
4	0	$0.1e^{+j\frac{\pi}{2}}$
5	$0.045e^{0.785j}$	0

Fázor 3. harmonické, oboustranné spektrum:

$$\hat{U}_3 = 0,1e^{-j\frac{\pi}{2}}0,159e^{-1,57j} + 0,1e^{j\frac{\pi}{2}}0 = -0,0159 + 0j \text{ V}$$

amplituda a fáze, oboustranné spektrum:

$$|\hat{U}_3| = |-0,0159 + 0j| = 15,9 \text{ mV}$$

$$\arg \hat{U}_3 = \arg(-0,0159 + 0j) = \pi \text{ rad}$$

efektivní hodnota a fáze, jednostranné spektrum:

$$|\hat{U}_3| = \frac{2}{\sqrt{2}}15,9 \text{ mV} = 22,5 \text{ mV}$$

na spektrálním analyzátoru naměřeno $U_{3\text{ef}} = 22,1 \text{ mV}$

$$\arg \hat{U}_3 = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi \text{ rad}$$

Výpočet čtvrté harmonické $k = 4$ ve spektru vyseknuté sinusovky:

k	Obdélník	Sinus (převrácen) – posunut o čtyři pozice do kladných frekvencí
-5	$0.045e^{-0.785j}$	0
-4	0	0
-3	$0.075e^{0.785j}$	0
-2	$0.159e^{1.57j}$	0
-1	$0.225e^{-0.785j}$	0
0	1/4	0
1	$0.225e^{0.785j}$	0
2	$0.159e^{-1.57j}$	0
3	$0.075e^{-0.785j}$	$0.1e^{-j\frac{\pi}{2}}$
4	0	0
5	$0.045e^{0.785j}$	$0.1e^{+j\frac{\pi}{2}}$

Fázor 4. harmonické, oboustranné spektrum:

$$\hat{U}_4 = 0,1e^{-j\frac{\pi}{2}} 0,075e^{-0,785j} + 0,1e^{j\frac{\pi}{2}} 0,045e^{0,785j} = -0.0085 - 0.0021j \text{ V}$$

amplituda a fáze, oboustranné spektrum:

$$|\hat{U}_4| = |-0.0085 - 0.0021j| = 8,7 \text{ mV}$$

$$\arg \hat{U}_4 = \arg(-0.0085 - 0.0021j) = -2.8961 \text{ rad}$$

efektivní hodnota a fáze, jednostranné spektrum:

$$|\hat{U}_4| = \frac{2}{\sqrt{2}} 8,7 \text{ mV} = 12,30 \text{ mV}$$

na spektrálním analyzátoru naměřeno $U_{4\text{ef}} = 12,3 \text{ mV}$

$$\arg \hat{U}_4 = -2,8961 + \frac{\pi}{2} = -1.3261 \text{ rad}$$

..... atd.