Komplexní analýza

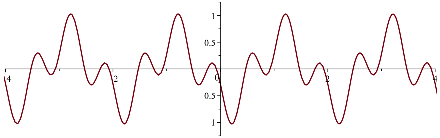
Fourierovy řady

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
bohata@math.feld.cvut.cz

Úvod

- Často se setkáváme s periodickými funkcemi: kmitání bodu na struně, průběh elektrického napětí, srdeční činnost (elektrokardiogram), ...
- Mnoho periodických funkcí můžeme psát jako lineární kombinaci komplexních exponenciál.
- Například graf



odpovídá funkci

$$
\begin{aligned}
f(t) &= -\frac{1}{2}\cos(\pi t) + \frac{2}{9}\cos(3\pi t) - \frac{2}{7}\sin(\pi t) - \frac{2}{5}\sin(3\pi t) \\
&= \alpha e^{-3i\pi t} + \beta e^{-i\pi t} + \gamma e^{i\pi t} + \delta e^{3i\pi t},
\end{aligned}
$$

kde $\beta = \overline{\gamma} = -\frac{1}{4} - \frac{i}{7}$ a $\alpha = \overline{\delta} = \frac{1}{9} - \frac{i}{5}$.

Úvod

- Ne všechny periodické funkce však lze vyjádřit jako lineární kombinace komplexních exponenciál. Pokud by tak šla vyjádřit například funkce

$$f(t) = |\sin t|,$$

pak by musela být všude diferencovatelná, což není.

- Avšak $f(t)$ lze vyjádřit pomocí (nekonečné) řady obsahující násobky komplexních exponenciál. Navíc koeficienty u jednotlivých exponenciál jsou dány jistým integrálním vzorcem, ve kterém vystupuje funkce f. Takové řady nazýváme Fourierovými řadami.
- Počátky Fourierových řad (18. století a začátek 19. století): problémy vedení tepla a vlnění.
- Aplikace: diferenciální rovnice, fyzika, teorie signálů, komprese dat,...

Trigonometrické řady

Definice

Nechť $T > 0$ a $c_n \in \mathbb{C}$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$. Řada

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}}$$

se nazývá trigonometrická řada.
Řekneme, že trigonometrická řada konverguje v bodě $t \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{\frac{2\pi i k t}{T}}$$

existuje konečná. Tato limita (pokud je konečná) se nazývá součtem trigonometrické řady v bodě t.

Trigonometrické řady

- Částečné součty
$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{\frac{2\pi ikt}{T}}$$
trigonometrické řady se nazývají trigonometrické polynomy.
- Konverguje-li trigonometrická řada v nějakém bodě t, pak také konverguje v každém bodě $t + lT$, kde $l \in \mathbb{Z}$.
- Konverguje-li trigonometrická řada
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi int}{T}}$$
v nějakém bodě, pak její součet je periodická funkce s periodou T.

Periodické rozšíření

Definice

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $T > 0$ a funkce $f : [a, a+T] \to \mathbb{C}$ splňuje $f(a) = f(a+T)$. Periodickým rozšířením funkce f budeme rozumět periodickou funkci $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ s periodou T, jejíž zúžení na interval $[a, a+T]$ je funkce f.

- Každá periodická funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je periodickým rozšířením nějaké vhodné funkce. V dalším proto budeme zkoumat funkce $f : [a, a+T] \to \mathbb{C}$ místo funkcí periodických.

Ortogonalita

Nechť $-\infty < a < b < +\infty$.

- Značení:

$$L^2([a,b]) = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{C} \,\middle|\, \int_a^b |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t < \infty \right\}.$$

- Na $L^2([a,b])$ je dán „skalární součin“ předpisem

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Tvrzení

Nechť $m, n \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}$ a $T > 0$. Potom v $L^2([a, a+T])$ platí

$$\left\langle e^{\frac{2\pi i m t}{T}}, e^{\frac{2\pi i n t}{T}} \right\rangle = \begin{cases} T & \textit{pro } m = n, \\ 0 & \textit{pro } m \neq n. \end{cases}$$

Důkaz: Viz přednáška. ∎

Ortogonalita

Předpokládejme, že $a \in \mathbb{R}$, $T > 0$, $f \in L^2([a, a+T])$ a

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}}.$$

- Jak najít koeficienty c_n?
- Využitím ortogonality dostaneme

$$c_n = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) e^{-\frac{2\pi i n t}{T}} \, \mathrm{d}t.$$

Definice Fourierovy řady

Definice

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $T > 0$ a $f \in L^2([a, a+T])$. Řada

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}},$$

kde

$$c_n = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) e^{-\frac{2\pi i n t}{T}} \, \mathrm{d}t,$$

se nazývá (komplexní) Fourierova řada funkce f a koeficienty c_n se nazývají (komplexní) Fourierovy koeficienty funkce f.

- Konverguje-li Fourierova řada funkce f v bodě $t \in \mathbb{R}$, označíme její součet symbolem $\mathscr{F}_f(t)$.
- Definici bychom mohli rozšířit i na funkce z prostoru $L^1([a, a+T]) = \left\{ f : [a, a+T] \to \mathbb{C} \,\middle|\, \int_a^{a+T} |f(t)| \, \mathrm{d}t < \infty \right\}$.

Reálný tvar Fourierovy řady

Reálná Fourierova řada funkce $f \in L^2([a, a+T])$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right),$$

kde

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)\,\mathrm{d}t = c_n + c_{-n} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}_0; \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)\,\mathrm{d}t = i(c_n - c_{-n}) \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

- Nabývá-li f pouze reálných hodnot, pak

  $$c_{-n} = \overline{c_n}.$$

  V tomto případě je tak

  $$\begin{aligned} a_n &= 2\mathrm{Re}\, c_n \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}_0; \\ b_n &= -2\mathrm{Im}\, c_n \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Jednoduchý příklad

Příklad

Uvažme funkci

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \in [-1,0), \\ 1 & \text{pro } t \in [0,1]. \end{cases}$$

Zřejmě $f \in L^2([-1,1])$. Komplexní Fourierova řada funkce f je

$$\frac{1}{2} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1-(-1)^n}{2\pi i n} e^{i\pi n t} = \frac{1}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{i\pi(2n+1)} e^{i\pi(2n+1)t},$$

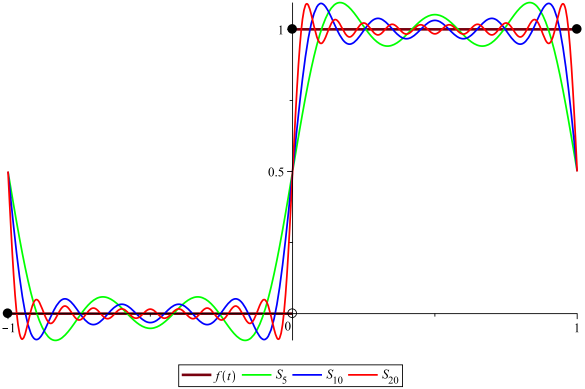
Reálná Fourierova řada funkce f je

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{\pi n} \sin(\pi n t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi(2n+1)} \sin(\pi(2n+1)t).$$

Jednoduchý příklad – částečné součty

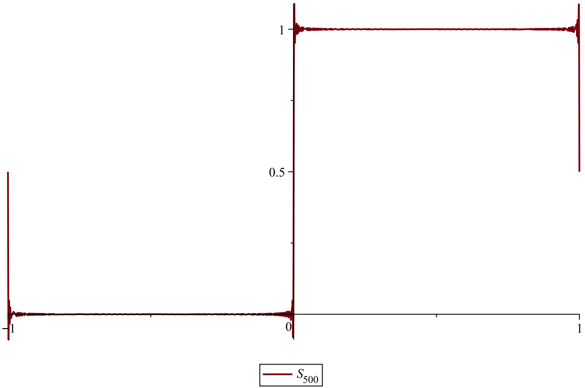
Příklad (Pokračování)

Označme $S_n = \sum_{k=-n}^{n} c_n e^{\frac{2\pi int}{T}}$.



Jednoduchý příklad – Gibbsův jev

Příklad (Pokračování)



Velikost „překmitů“ částečných součtů S_n blízko bodů, ve kterých není f spojitá, se nezmenšuje s rostoucím n. Tomuto jevu se říká Gibbsův jev.

Bodová konvergence

Definice

Řekneme, že funkce $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je po částech spojitá na $[a, b] \subseteq D$, jestliže existuje konečně mnoho bodů $t_0, \dots, t_n \in [a, b]$ tak, že

1. $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$;
2. pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$ je f spojitá na (t_{k-1}, t_k);
3. $f(t_k+) = \lim\limits_{t \to t_k+} f(t)$ je konečná pro každé $k \in \{0, \dots, n-1\}$;
4. $f(t_k-) = \lim\limits_{t \to t_k-} f(t)$ je konečná pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$.

- Podle uvedené definice nemusí být po částech spojitá funkce definována v bodech $t_0, \dots, t_n$.

Bodová konvergence

Věta (Dirichletova věta)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $T > 0$ *a* $f : [a, a+T] \to \mathbb{C}$. *Předpokládejme, že* f *a* f' *jsou po částech spojité funkce na* $[a, a+T]$. *Pak (komplexní i reálná) Fourierova řada funkce* f *konverguje v každém bodě intervalu* $[a, a+T]$ *a její součet je*

1. $\mathscr{F}_f(t) = \frac{1}{2}\left[f(t+) + f(t-)\right]$ *pro každé* $t \in (a, a+T)$;
2. $\mathscr{F}_f(a) = \mathscr{F}_f(a+T) = \frac{1}{2}\left[f(a+) + f((a+T)-)\right]$.

Důkaz: Vynecháváme. ∎

- Jsou-li splněny předpoklady Dirichletovy věty, f je spojitá na $[a, a+T]$ a $f(a) = f(a+T)$, pak $f(t) = \mathscr{F}_f(t)$ pro každé $t \in [a, a+T]$. V tomto případě je tak $\mathscr{F}_f(t)$ periodickým rozšířením funkce $f(t)$.

Příklady

Příklad

Již víme, že komplexní Fourierova řada funkce

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \in [-1, 0) \\ 1 & \text{pro } t \in [0, 1]. \end{cases}$$

je

$$\frac{1}{2} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1 - (-1)^n}{2\pi i n} e^{i\pi n t}.$$

Podle Dirichletovy věty konverguje tato řada pro každé $t \in [-1, 1]$ (a tedy pro každé $t \in \mathbb{R}$) a platí, že

$$\mathscr{F}_f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro každé } t \in (-1, 0), \\ 1 & \text{pro každé } t \in (0, 1), \\ \frac{1}{2} & \text{pro každé } t \in \{-1, 0, 1\}. \end{cases}$$

Příklady

Příklad

Je dána funkce

$$f(t) = \sin t, \quad t \in [0, \pi].$$

Komplexní Fourierova řada této funkce je

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi(1-4n^2)} e^{2int}.$$

Reálná Fourierova řada této funkce je

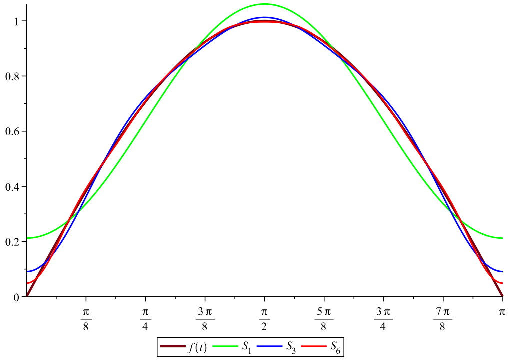
$$\frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4n^2)} \cos(2nt).$$

Z Dirichletovy věty plyne, že $\mathscr{F}_f(t) = |\sin t|$ pro každé $t \in \mathbb{R}$.

Příklady

Příklad (Pokračování)

Označme $S_n = \sum_{k=-n}^{n} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}}$.



Z Dirichletovy věty plyne, že $\mathscr{F}_f(t) = |\sin t|$ pro každé $t \in \mathbb{R}$.

Parsevalova rovnost

Věta (Parsevalova rovnost)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $T > 0$ *a* $f \in L^2([a, a+T])$. *Jestliže* $c_n \in \mathbb{C}$ *jsou komplexní Fourierovy koeficienty funkce* f, *pak*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

- Pro reálné Fourierovy koeficienty a_n a b_n funkce $f \in L^2([a, a+T])$ má Parsevalova rovnost tvar

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t$$