

# Komplexní analýza

## Fourierova transformace

Martin Bohata

Katedra matematiky  
FEL ČVUT v Praze  
bohata@math.feld.cvut.cz

# Motivace a definice

- Chceme najít rozklad do funkcí  $e^{i\omega t}$  i pro neperiodickou funkci  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ .
- Aplikace: Zpracování signálu, fyzika, matematika,...

## Definice

Nechť  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . **Fourierova transformace** funkce  $f$  je funkce  $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definovaná předpisem

$$\hat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt.$$

**Inverzní Fourierova transformace** funkce  $f$  je funkce  $\check{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definovaná předpisem

$$\check{f}(\omega) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt.$$

- Jiné značení:  $\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega)$  a  $\check{f}(\omega) = \mathcal{F}^{-1}[f(t)](\omega)$ .
- Integrál v definici Fourierovy transformace chápeme ve smyslu Cauchyovy hlavní hodnoty:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R g(t) dt.$$

- Postačující podmínka pro existenci Fourierovy transformace (a inverzní Fourierovy transformace) je  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , kde

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < +\infty \right\}.$$

# Fourierova transformace charakteristické funkce

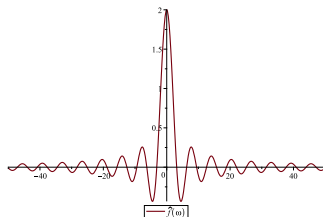
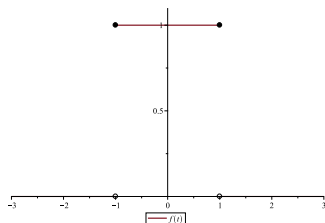
## Příklad

Ať

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1, 1], \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]. \end{cases}$$

Potom

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} 2 \frac{\sin \omega}{\omega}, & \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 2, & \omega = 0. \end{cases}$$



# Základní vlastnosti

## Příklad

$$\mathcal{F} \left[ \frac{1}{1+t^2} \right] (\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$

## Tvrzení

*Nechť funkce  $f$  a  $g$  mají Fourierovu transformaci a  $a \in \mathbb{C}$ .*

- 1  $\mathcal{F} [f(t) + ag(t)] (\omega) = \mathcal{F} [f(t)] (\omega) + a\mathcal{F} [g(t)] (\omega).$
- 2  $\mathcal{F} [f(t)] (\omega) = 2\pi\mathcal{F}^{-1} [f(t)] (-\omega).$
- 3 *Je-li  $a \in \mathbb{R}$ , pak  $\mathcal{F} [f(t - a)] (\omega) = e^{-i\omega a} \mathcal{F} [f(t)] (\omega).$*
- 4 *Je-li  $a \in \mathbb{R}$ , pak  $\mathcal{F} [e^{iat} f(t)] (\omega) = \mathcal{F} [f(t)] (\omega - a).$*
- 5 *Je-li  $a \in \mathbb{R}$  nenulové, pak  $\mathcal{F} [f(at)] (\omega) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F} [f(t)] \left( \frac{\omega}{a} \right).$*

Důkaz: Viz přednáška. ■

# Základní vlastnosti

## Příklad

$$\mathcal{F} \left[ \frac{e^{it}}{1 + (2t - 3)^2} \right] (\omega) = \frac{\pi}{2} e^{-\frac{3i(\omega-1)}{2}} e^{-\frac{|\omega-1|}{2}}$$

## Věta (O spojitosti obrazu)

Jestliže  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , pak  $\hat{f}$  je spojitá funkce.

Důkaz: Vynecháváme. ■

## Věta (Obraz derivace)

Jestliže  $n \in \mathbb{N}$  a  $f, f', \dots, f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$  jsou spojité, pak

$$\mathcal{F} \left[ f^{(n)}(t) \right] (\omega) = (i\omega)^n \mathcal{F} [f(t)] (\omega).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

# Základní vlastnosti

## Věta (O derivaci obrazu)

Jestliže  $f(t)$  a  $tf(t)$  leží v  $L^1(\mathbb{R})$ , pak

$$\mathcal{F} [tf(t)] (\omega) = i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F} [f(t)] (\omega).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

## Příklad (Obraz Gaussovy funkce)

$$\mathcal{F} [e^{-t^2}] (\omega) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}}.$$

Odtud plyne, že pro  $a > 0$  je

$$\mathcal{F} [e^{-at^2}] (\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}.$$

# Konvoluce

## Definice

**Konvoluce** funkcí  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  a  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  je funkce  $h = f * g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definovaná vztahem

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau.$$

- Existuje-li konvoluce  $f * g$ , pak  $f * g = g * f$ .
- Lze ukázat, že pro  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  je  $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ .

## Věta (O obrazu konvoluce)

Jestliže  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ , potom

$$\mathcal{F} [(f * g)(t)] (\omega) = \mathcal{F} [f(t)] (\omega) \mathcal{F} [g(t)] (\omega).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■



## Příklad

Ať

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1, 1], \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]. \end{cases}$$

Potom

$$(f * f)(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, -2] \cup (2, \infty), \\ t + 2, & t \in (-2, 0], \\ 2 - t, & t \in (0, 2]. \end{cases}$$

Fourierova transformace  $f * f$  je

$$\mathcal{F} [(f * f)(t)] (\omega) = \begin{cases} 4 \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2}, & \omega \neq 0, \\ 4, & \omega = 0. \end{cases}$$

# Věta o inverzi

## Definice

Funkce  $f$  se nazve **po částech spojitá** na intervalu  $I \subseteq \mathbb{R}$ , jestliže je po částech spojitá na každém intervalu  $[a, b] \subseteq I$ .

## Věta (O inverzní Fourierově transformaci)

Nechť  $f \in L^1(\mathbb{R})$ .

- ① Je-li  $f$  spojitá a  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ , pak pro každé  $t \in \mathbb{R}$  je

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1} \left[ \hat{f}(\omega) \right] (t).$$

- ② Jestliže  $f$  a  $f'$  jsou po částech spojité (na  $\mathbb{R}$ ), pak pro každé  $t \in \mathbb{R}$  je

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \mathcal{F}^{-1} \left[ \hat{f}(\omega) \right] (t).$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

# Věta o inverzi

## Důsledek

*Jestliže dvě spojité funkce z  $L^1(\mathbb{R})$  mají stejnou Fourierovu transformaci, potom se rovnají.*

Důkaz: Vynecháváme. ■

## Příklad

Je dána diferenciální rovnice

$$y''(t) - y(t) = e^{-t^2}.$$

Využitím Fourierovy transformace dostaneme řešení:

$$y(t) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|} e^{-(t-\tau)^2} d\tau.$$

# Souvislost s Fourierovou řadou

Nechť  $a \in \mathbb{R}$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  je periodická funkce s periodou  $T > 0$  a  $f|_{[a, a+T]} \in L^1([a, a+T])$ . Položme

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [a, a+T], \\ 0, & t \notin [a, a+T]. \end{cases}$$

Pak Fourierovy koeficienty  $c_n$  funkce  $f|_{[a, a+T]}$  jsou

$$c_n = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} dt = \frac{1}{T} \mathcal{F} [f_T(t)] \left( \frac{2\pi n}{T} \right).$$

# Souvislost s Fourierovou řadou

## Příklad

Ať

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1, 1], \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]. \end{cases}$$

Již víme, že

$$\mathcal{F} [(f * f)(t)] (\omega) = \begin{cases} 4 \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2}, & \omega \neq 0, \\ 4, & \omega = 0. \end{cases}$$

Fourierova řada zúžení funkce  $f * f$  na interval  $[-2, 2]$  proto je

$$1 + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{4 \sin^2 \left( \frac{\pi n}{2} \right)}{\pi^2 n^2} e^{i \frac{\pi n}{2} t}.$$

- Jsou-li  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ , pak platí tzv. Parsevalova rovnost

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)} d\omega.$$

Odtud dostáváme tzv. Plancherelovu rovnost

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

- Zobecnění Fourierovy transformace do více poměnných: Fourierova transformace funkce  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  je funkce  $\hat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  daná předpisem

$$\hat{f}(p) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\langle x,p \rangle} dx.$$

Analogicky se definuje inverzní Fourierova transformace funkce  $f$ .